



Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

# Congruências de Retas e Equações das Superfícies Principais

Igor Chagas Santos

SÃO CRISTÓVÃO – SE  
FEVEREIRO DE 2019

Universidade Federal de Sergipe  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT

# Congruências de Retas e Equações das Superfícies Principais

por

Igor Chagas Santos

sob a orientação da

Prof<sup>fa</sup>. Dr<sup>a</sup>. Débora Lopes da Silva

São Cristóvão – SE  
Fevereiro de 2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

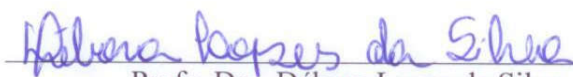
*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

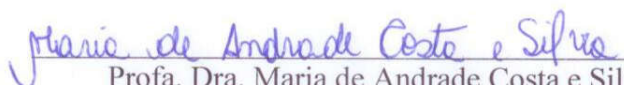
## **Congruências de Retas e Equações das Superfícies Principais**

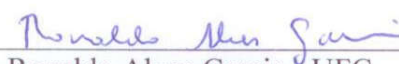
*por*

*Igor Chagas Santos*

Aprovada pela banca examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Débora Lopes da Silva - UFS  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Maria de Andrade Costa e Silva - UFS  
Primeiro Examinador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia - UFG  
Segundo Examinador

São Cristóvão, 21 de Fevereiro de 2019

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

Santos, Igor Chagas  
S237c Congruências de retas e equações das superfícies principais /  
Igor Chagas Santos ; orientadora Débora Lopes da Silva. – São  
Cristóvão, 2019.  
124 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal  
de Sergipe, 2019.

1. Matemática. 2. Congruências (Geometria). 3.  
Singularidades (Matemática). 4. Superfícies (Matemática). 4.  
Equações diferenciais. 5. Curvas. I. Silva, Débora Lopes da  
orient. II. Título.

CDU 512.7

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar ao meu lado e dar sentido à minha vida. Aos meus pais, Maria Izabel e Abdon e minha irmã, Isabela, por sempre me incentivarem e apoiarem. Aos meus amigos do IFS, em especial, Pedro e Kássio, pelo apoio e incentivo sempre que nos encontramos. Aos meus colegas de trabalho da UFS, em especial, Letícia e Rosa pelo apoio e amizade desde o momento em que os conheci. Ao meu amigo, quase irmão, Neto, pela paciência, pelas conversas e pelo apoio durante todos esses anos em que trabalhamos e convivemos juntos. Aos professores Bruno e Zaqueu, pelas boas conversas, pelos bons conselhos, além da compreensão e do incentivo constante. À professora Débora, pela paciência e dedicação constante durante mais de quatro anos de orientação. Aos professores Maria e Ronaldo, pela paciência em ler o trabalho e participar da banca. Ao professor Leandro pelo comprometimento que tem com a profissão e pelo incentivo desde o meu primeiro dia de aula na UFS. Aos meus amigos de turma Rodrigo, Gabrielle e Jucileide, pela parceria, conversas e apoio durante toda o curso. À Verônica pelo apoio, pela amizade e pela paciência nos momentos de estresse pelos quais passamos durante esses dois anos. Aos professores do DMA e do PROMAT pelo constante incentivo.

# Resumo

Motivados por Monge, que em [10] apresentou a configuração principal das linhas de curvatura sobre o Elipsoide de três eixos distintos, e por Sotomayor e Gutierrez, que em [12], utilizando Teoria Qualitativa de E.D.O.'s, estabeleceram com rigor a configuração das linhas de curvatura em vizinhanças de pontos umbílicos, nosso objetivo é, considerando a congruência de retas gerada pela restrição ao Elipsoide de um campo linear com três autovalores reais, distintos e não nulos ou dois autovalores complexos conjugados e um autovalor real não nulo, estudar o comportamento das curvas principais da congruência sobre o Elipsoide. Neste contexto, Bianchi [1], Eisenhart [6], Forsyth [8], Pottmann e Wallner [17] e Weatherburn [22] nos servem como base para Teoria de Congruências de Retas. Levando-se em conta que as curvas principais são curvas integrais de uma Equação Diferencial Binária, Bruce e Fidal [2] e Bruce e Tari [3] nos servem como referências para estudar localmente o comportamento dessas curvas em vizinhanças de pontos especiais, que chamaremos de Singularidades Umbílicas da Congruência. Ao final, o que pretendemos apresentar como novidade neste trabalho são as possíveis configurações das curvas principais da congruência no Elipsoide de três eixos distintos para as congruências consideradas.

**Palavras-chave:** congruência de retas; singularidades umbílicas; superfícies principais; equações diferenciais binárias; curvas principais.

# Abstract

Motivated by Monge, which in [10] presented the principal configuration of tri-axial ellipsoid, and by Sotomayor and Gutierrez, which in [12], using the Qualitative Theory of O.D.E.'s rigorously established the configuration of the lines of curvature in neighborhoods of umbilic points, our objective is, considering the congruence of lines generated by the restriction to the Ellipsoid of a linear field with three real, distinct and nonzero eigenvalues or two complex conjugate eigenvalues and one nonzero real eigenvalue, to study the behavior of the principal curves of the congruence on the Ellipsoid. In this context, Bianchi [1], Eisenhart [6], Forsyth [8], Pottmann and Wallner [17] and Weatherburn [22] are our references for the Theory of Congruences of Lines . The principal curves are integral curves of a Binary Differential Equation, hence, Bruce and Fidal [2] and Bruce and Tari [3] are our references to study the local the behavior of these curves in neighborhoods of special points, that we will call Umbilic Singularities of the Congruence. In the final chapter, what we intend to present as contribution of this study are the possible configurations of the principal curves of the congruence in the Ellipsoid for the considered congruences.

**Keywords:** congruence of lines; Umbilic Singularities; principal surfaces; Binary Differential Equation; principal curves.

# Lista de Figuras

1.1	Nó Estável . . . . .	17
1.2	Nó instável . . . . .	17
1.3	Sela . . . . .	18
1.4	Centro . . . . .	18
1.5	Foco estável . . . . .	19
1.6	Foco instável . . . . .	19
1.7	Nó estrelado . . . . .	20
1.8	Nó impróprio - caso 2 . . . . .	20
1.9	Limite de regressão . . . . .	26
1.10	Seção normal . . . . .	31
1.11	Configuração Principal do Elipsoide. . . . .	33
2.1	Reta qualquer na congruência. . . . .	35
2.2	Representação esférica. . . . .	37
2.3	Superfície de congruência. . . . .	37
2.4	Pontos limites, curvas sobre a superfície diretora e sua representação esférica. . . . .	40
2.5	Superfície principal associada a $u = 2$ . . . . .	42
2.6	Superfície principal associada a $\theta = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	43
2.7	Posição relativa dos planos centrais em relação aos planos principais. . . . .	47
2.8	Pontos importantes numa reta da congruência. . . . .	50
2.9	Superfície do meio da congruência. . . . .	52
2.10	$z$ bissectando o ângulo entre os planos focais. . . . .	54
2.11	Superfície média e a reta determinada pelos parâmetros $u = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	63
2.12	Superfície média e a reta determinada pelos parâmetros $u = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	64
2.13	Refração de um raio . . . . .	69
2.14	Reflexão de um raio . . . . .	70
3.1	Casos $D_1$ , $D_2$ e $D_3$ . . . . .	85
3.2	Casos listados na observação (3.2.2). . . . .	86
4.1	Curvas Principais no Elipsoide . . . . .	117



4.2	Singularidade do tipo $D_2$ . . . . .	117
4.3	Singularidade do tipo $D_1$ . . . . .	118
4.4	Curvas Principais Sobre o Elipsoide. . . . .	120
4.5	Curvas Principais no Elipsoide . . . . .	121
4.6	Curvas Principais Sobre o Elipsoide. . . . .	122

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	15
1.1.1 Sistemas Bidimensionais Simples . . . . .	15
1.1.2 Campos de Vetores . . . . .	20
1.2 Superfícies Regradas . . . . .	22
1.3 Linhas de Curvatura . . . . .	26
1.3.1 Interpretação geométrica da curvatura normal . . . . .	31
<b>2 Congruências de Retas</b>	<b>34</b>
2.1 Definições e exemplos . . . . .	34
2.1.1 Limites e Planos Principais . . . . .	38
2.1.2 Fórmula de Hamilton . . . . .	44
2.1.3 Focos e Planos Focais . . . . .	47
2.1.4 Parâmetro de Distribuição . . . . .	54
2.1.5 Superfícies Regradas Médias . . . . .	56
2.1.6 Congruência Normal . . . . .	66
2.1.7 Congruência Isotrópica . . . . .	73
<b>3 Equações Diferenciais Binárias e Campo de Lie-Cartan</b>	<b>75</b>
3.1 Levantamento do Campo de Direções . . . . .	75
3.2 Comportamento Local das Curvas integrais . . . . .	81
<b>4 Singularidades Umbílicas em Congruências no Elipsoide</b>	<b>87</b>
4.1 Campos lineares com três autovalores reais, não nulos e distintos . . . . .	87
4.2 Caso 1) . . . . .	88
4.2.1 Singularidades $r(\pm u_0, v_0)$ . . . . .	89
4.2.2 Campos lineares com todos os autovalores positivos ou todos os autovalores negativos . . . . .	93
4.2.3 Campos lineares com dois os autovalores positivos e um negativo ou dois autovalores negativos e um positivo . . . . .	97

4.2.4	Singularidades $r(u_1, \pm v_1)$ . . . . .	100
4.3	Caso 2) . . . . .	104
4.3.1	Singularidades $r(\pm u_2, z_2)$ . . . . .	104
4.3.2	Singularidades $r(u_3, \pm z_3)$ . . . . .	107
4.4	Caso 3) . . . . .	109
4.4.1	Singularidades $r(\pm v_4, z_4)$ . . . . .	110
4.4.2	Singularidades $r(u_5, \pm z_5)$ . . . . .	112
4.5	O campo com dois autovalores complexos conjugados . . . . .	118
4.6	Conclusões . . . . .	121

# Introdução

Gaspar Monge, em "Mémoire Sur La Theorie des deblais et des remblais" cuja primeira leitura, segundo Ghys [11], foi feita em 7 de fevereiro de 1776 na Academia de Ciências da França e que teve um breve resumo publicado em 1784, trata do que atualmente chamamos de Congruência de retas, que nada mais é que uma família a 2-parâmetros de retas no espaço. Nesse trabalho, Monge concluiu que todas as retas de uma congruência são interseções de dois conjuntos de superfícies desenvolvíveis, ou ainda, que são retas simultaneamente tangentes a duas superfícies.

Monge também se dedica a estudar um caso especial de congruência de retas, que é a família das retas que são normais a uma dada superfície  $S$ , que segundo ele, são retas tangentes a duas superfícies, cujos pontos de tangência são os centros de curvatura de  $S$ . Dessa forma, Monge concluiu também que as interseções das superfícies desenvolvíveis com a superfície  $S$  são as curvas que hoje conhecemos como linhas de curvatura de  $S$ . Além de Monge, conforme citado por Eisenhart em [6], o matemático Ernst Eduard Kummer foi o primeiro a tratar exclusivamente da Teoria geral de congruências de retas, em "Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahien systeme" (Crelle's Journal, Vol. 57, 1859).

Outra importante fonte de motivação para desenvolver este trabalho é o estudo feito por Monge em [10], onde é apresentada a estrutura definida no Elipsoide pelos pontos umbílicos e pelas linhas de curvatura, o que é chamado em [12] de configuração principal do Elipsoide. Além disso, também nos serve de motivação o feito por Gutierrez e Sotomayor em [12], onde é estudado o comportamento global das configurações principais em superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Neste último trabalho, Gutierrez e Sotomayor estudam a estabilidade da configuração definida pelos pontos umbílicos e pelas famílias de linhas de curvatura principal de uma superfície compacta orientável imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Conforme o que consta em [21], o resultado de Monge para o Elipsoide é o primeiro exemplo não trivial de configuração principal, o que representou um marco para a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias.

No primeiro capítulo, faremos uma breve revisão a fim de familiarizar o leitor com alguns termos que aparecerão no decorrer do trabalho, além de revisar conteúdos de Equações Diferenciais Ordinárias e Geometria Diferencial. Para isso, tomamos como nossas principais referências a respeito da Teoria das E.D.O.'s, Sotomayor, em [19] e [20],

onde se encontram os detalhes e demonstrações aqui omitidos, enquanto que no contexto de Geometria Diferencial, tomamos Do Carmo [5] como nossa principal referência.

No segundo capítulo, guiados por Bianchi [1], Eisenhart [6], Forsyth [8], Pottmann e Wallner [17] e Weatherburn [22] estudaremos Congruências de Retas, definindo formalmente uma Congruência (2.1), bem como as formas quadráticas associadas a uma congruência (chamadas de formas de Kummer)(2.1.2) e os seus coeficientes, denotados por  $e, f, g, a, b, b'$  e  $c$ , para então definirmos a função

$$k(\mu, \xi) = -\frac{a(u_0, v_0)\mu^2 + (b + b')(u_0, v_0)\mu\xi + c(u_0, v_0)\xi^2}{e(u_0, v_0)\mu^2 + 2f(u_0, v_0)\mu\xi + g(u_0, v_0)\xi^2}$$

e mostrarmos que esta função, fixada uma reta da congruência, possui valores máximo e mínimo e a estes valores associamos duas superfícies regradas, que chamaremos de superfícies principais, cujas curvas diretrizes são dadas pela equação diferencial binária

$$u'(s)^2[2fa - e(b + b')] + 2u'(s)v'(s)(ag - ec) + v'(s)^2[g(b + b') - 2fc] = 0, \quad (1)$$

que será chamada de Equação das Superfícies Principais ou ainda de Equação das Curvas Principais.

Além disso, verificaremos que o estudo das linhas de curvatura corresponde a um caso particular de congruência de retas, quando consideramos a congruência gerada pela família das normais a uma superfície regular e tomamos esta superfície como a superfície de referência da congruência. Este fato complementa a nossa motivação para desenvolver este trabalho, pois nos faz observar as congruências de retas como uma forma mais geral de estudar curvas sobre superfícies.

No terceiro capítulo, tomando como base Bruce e Fidal [2] e Bruce e Tari [3], estudaremos equações diferenciais binárias da forma

$$A(u, v)dv^2 + 2B(u, v)dudv + C(u, v)du^2 = 0, \quad (2)$$

onde  $A, B$  e  $C$  são funções suaves que se anulam em  $(0, 0)$ . Para tanto, estudaremos o Campo de Lie-Cartan associado a essa equação e iremos verificar que localmente, sob algumas condições, a equação acima é topologicamente equivalente a uma das seguintes equações  $vdv^2 + 2(b_1u + b_2v)dudv \pm vdu^2 = 0$ , o que nos ajudará a identificar o comportamento das curvas integrais de (2) para  $(u, v)$  próximos de  $(0, 0)$ .

No quarto capítulo, nosso objetivo é considerar o elipsoide de três eixos distintos e a congruência gerada pela restrição de um campo linear com três autovalores reais, distintos e não nulos, ou com dois autovalores complexos conjugados e um autovalor real não nulo a esse elipsoide, a fim de encontrarmos as singularidades umbílicas da congruência e estudarmos o comportamento das curvas integrais da equação diferencial binária (1). Ao final, apresentaremos as configurações das curvas principais da congruência sobre o

Elipsoide de três eixos distintos para as congruências consideradas, o que representa a principal contribuição deste trabalho.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, tomando como bases Sotomayor [19] e Do Carmo [5], trataremos de alguns tópicos de Equações Diferenciais Ordinárias e Geometria Diferencial que nos serão úteis para o desenvolvimento do restante do trabalho. Inicialmente, falaremos a respeito de sistemas bidimensionais lineares e apresentaremos algumas definições da Teoria de E.D.O's que nos permitirão enunciar o Teorema de Hartman-Grobman. Em seguida, iremos definir e apresentar algumas propriedades das superfícies regradas, além disso, iremos apresentar alguns resultados importantes a respeito das linhas de curvatura que, no capítulo 2, serão vistos como um caso particular do estudo a respeito das Congruências de retas.

### 1.1 Preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, iremos comentar alguns tópicos referentes à Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, a fim de situar o leitor em relação a alguns termos que irão aparecer no decorrer do trabalho. Tomamos [19] e [20] como bases para esta seção.

#### 1.1.1 Sistemas Bidimensionais Simples

Consideraremos sistemas de equações diferenciais ordinárias da seguinte forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \quad (1.1)$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  e  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  ou, de forma equivalente:

$$x' = Ax, \quad (1.2)$$

com  $x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  e  $\det(A) \neq 0$ .

Estas equações são associadas a campos vetoriais lineares  $A$  em  $\mathbb{R}^2$ . A condição  $\det(A) \neq 0$  garante  $A$  injetivo, logo, sabendo que  $A$  é linear, temos que 0 é o único ponto fixo do fluxo linear  $\phi(t, x) = e^{tA}x$ . No caso em que  $\det(A) \neq 0$ , dizemos ainda que o sistema (1.1) é *simples*.

Seguindo como aprendido em Álgebra Linear, o polinômio característico de  $A$ , que denotaremos  $P_A(\lambda)$ , é dado por:

$$\lambda^2 - \text{traço}(A)\lambda + \det(A) \quad (1.3)$$

Logo, os valores próprios são:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{traço}(A) \pm \sqrt{[\text{traço}(A)]^2 - 4\det(A)}}{2} \quad (1.4)$$

Distinguimos os seguintes casos:

- a) Os valores próprios são reais e distintos. Note que  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ , pois  $\det(A) \neq 0$ .
- b) Os valores próprios são complexos e conjugados  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  e  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$
- c) Os valores próprios são reais e iguais  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

A seguir, apresentamos algumas informações a respeito das soluções do sistema (1.1), tomando como base o que consta em Sotomayor [19], onde podem ser encontrados mais detalhes a respeito das demonstrações.

Consideremos  $v_1$  e  $v_2$  autovetores associados, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Sejam ainda  $E_1$  e  $E_2$  as retas passando pela origem nas direções  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente.

**Caso a)**

Para este primeiro caso, distinguimos três subcasos, a saber:

- **Caso ( $a_1$ ):**  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$  (Nó estável)

Neste subcaso, toda trajetória tende à origem tangente à  $E_1$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , exceto a origem, que permanece parada. Gráficamente, temos:



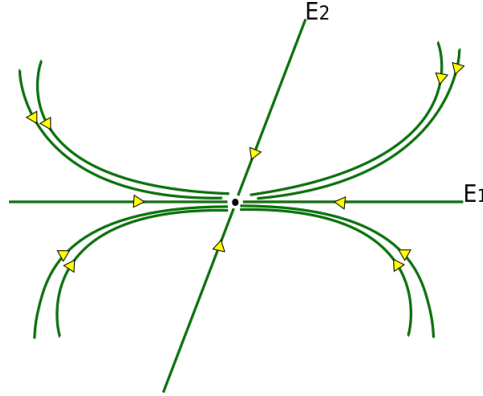


Figura 1.1: Nó Estável

- **Caso ( $a_2$ ):**  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$  (N  instável)

Toda trajetória tende a  $\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ , exceto a origem, que permanece parada. Toda trajetória tende à origem tangente    $E_1$ , quando  $t \rightarrow -\infty$ . Graficamente, temos:

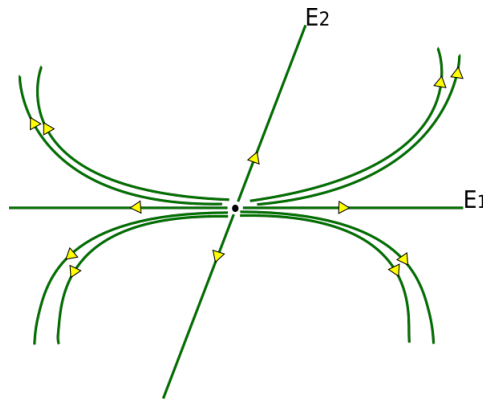


Figura 1.2: Nó instável

- **Caso ( $a_3$ ):**  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$  (Sela)

As trajetórias que passam por pontos de  $E_1$  permanecem nestas retas e tendem à origem, quando  $t \rightarrow \infty$ , enquanto que as trajetórias que passam por pontos de  $E_2$  permanecem nessa reta e tendem a  $\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ . As trajetórias que não tocam  $E_1$  ou  $E_2$  tendem a  $\infty$  quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , da seguinte maneira:

- Se  $t \rightarrow +\infty$ , então a componente segundo  $E_1$  da solução tende a 0 e a componente segundo  $E_2$  tende a  $\infty$ ;
- Se  $t \rightarrow -\infty$ , então a componente segundo  $E_2$  da solução tende a 0 e a componente segundo  $E_1$  tende a  $\infty$ .

Graficamente, temos:

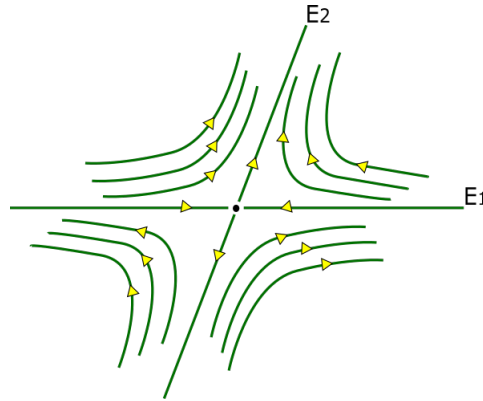


Figura 1.3: Sela

Na figura acima, as setas indicam o sentido do percurso conforme  $t$  cresce.

**Caso b)** Para este caso, distinguimos três subcasos, a saber:

- **Caso  $(b_1)$ :**  $\alpha = 0$  (Centro)

As soluções de (1.1), com exceção da origem, são elipses.

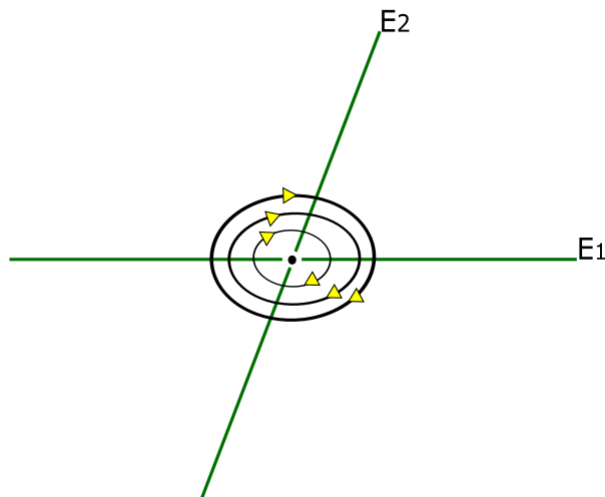


Figura 1.4: Centro

- **Caso  $(b_2)$ :**  $\alpha < 0$  (Foco estável)

As soluções são espirais logarítmicas que tendem à origem, conforme  $t \rightarrow \infty$ . Assim, graficamente temos:

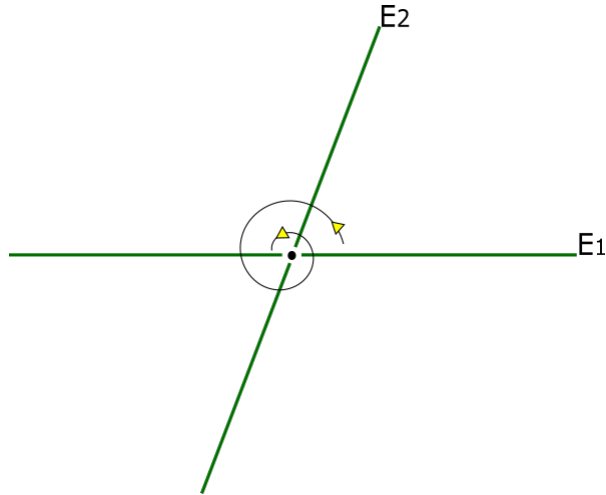


Figura 1.5: Foco estável

- **Caso ( $b_3$ ):**  $\alpha > 0$  (Foco instável)

As soluções são espirais logarítmicas que se afastam da origem à medida que  $t$  aumenta.

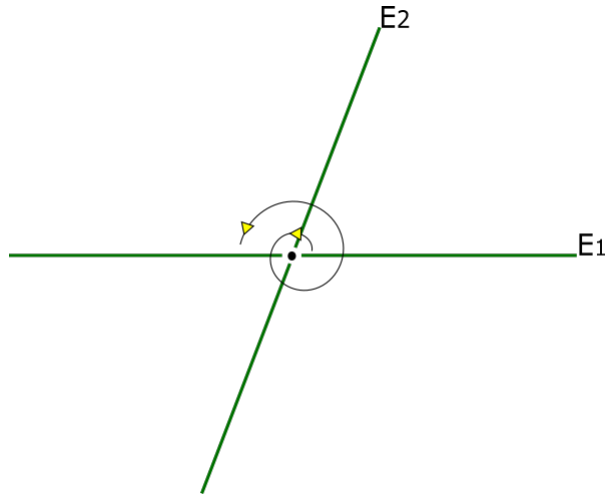


Figura 1.6: Foco instável

**Caso c)**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  com  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$  (Nó impróprio)

Distinguimos dois subcasos, a saber:

- **Caso ( $c_1$ ):** (Nó estrelado)

Seja  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Sabemos que o autoespaço associado a  $\lambda$  é  $V_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_d)$ . Para este subcaso, supomos que  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_d) = 2$ , logo, existem vetores  $v_1$  e  $v_2$  linearmente independentes associados ao autovalor  $\lambda$ . As soluções são semi-retas, tais que:

Se  $\lambda > 0$ , as soluções tendem a  $\infty$  (figura da esquerda), quando  $t \rightarrow \infty$ , enquanto que se  $\lambda < 0$ , as soluções tendem à origem, quando  $t \rightarrow \infty$  (figura da direita)

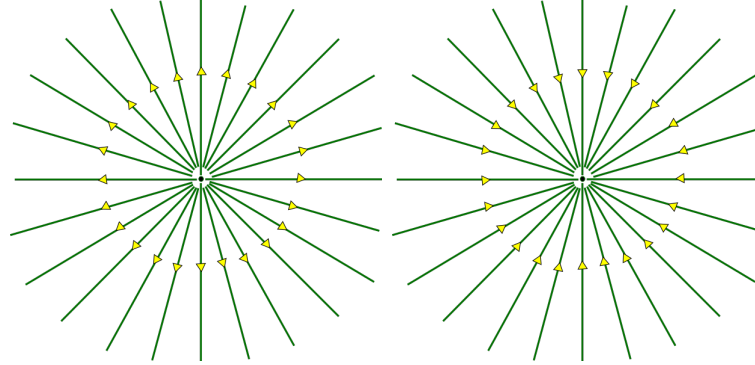


Figura 1.7: Nó estrelado

- **Caso ( $c_2$ ):**

Neste caso, consideramos que  $\dim V_\lambda = 1$ . As trajetórias que passam por  $E_1$ , com exceção da origem, são semirretas contidas em  $E_1$ . Se  $\lambda > 0$ , toda trajetória tende à origem, quando  $t \rightarrow -\infty$ , enquanto que se  $\lambda < 0$ , toda trajetória tende à origem, quando  $t \rightarrow +\infty$ . As trajetórias que não tocam  $E_1$  tem retas tangentes tendendo à  $E_1$ , conforme  $t \rightarrow \pm\infty$ . Graficamente, temos o seguinte para o caso em que  $\lambda < 0$ :

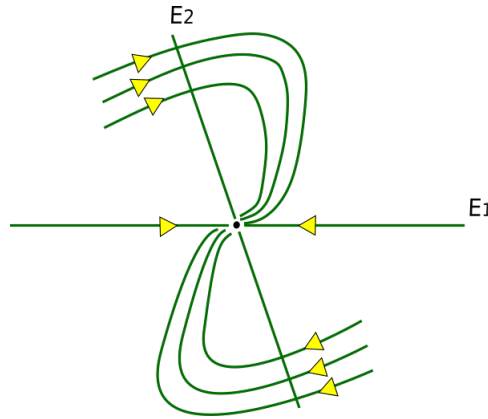


Figura 1.8: Nó impróprio - caso 2

## 1.1.2 Campos de Vetores

A seguir, apresentamos algumas definições e alguns resultados a respeito de Campos de Vetores, com o intuito de ao final desta subseção, enunciarmos o Teorema de Hartman-Grobman.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $\Delta$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  em  $\Delta$  é uma aplicação  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Ao campo vetorial  $X$*

associamos a equação diferencial

$$x' = X(x). \quad (1.5)$$

**Definição 1.1.2** (Curvas Integrais de um Campo). *As soluções da equação (1.5) são aplicações  $\phi : I \rightarrow \Delta$ , onde  $I$  é um intervalo em  $\mathbb{R}$ , tais que*

$$\frac{d\phi}{dt} = X(\phi(t)),$$

para todo  $t \in I$ . Chamamos estas soluções de curvas integrais de  $X$  ou da equação diferencial (1.5).

**Definição 1.1.3** (Ponto Singular). *Dado um campo  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ , um ponto  $x \in \Delta$  é dito um ponto singular de  $X$  se  $X(x) = 0$ .*

**Definição 1.1.4.** *Uma curva integral  $\phi : I \rightarrow \Delta$  de  $X$  chama-se máxima se para toda curva integral  $\psi : J \rightarrow \Delta$ , tal que  $I \subseteq J$  e  $\phi = \psi|_I$ , então  $I = J$  e, conseqüentemente,  $\phi = \psi$ . Dizemos ainda que  $I$  é o intervalo máximo.*

**Teorema 1.1.1.** *a) Para cada  $x \in \Delta$  existe um intervalo aberto  $I_x$  onde está definida a única solução máxima  $\phi_x$  de (1.5), tal que  $\phi_x(0) = x$ .*

*b) Se  $y = \phi_x(s)$  e  $s \in I_x$ , então  $I_y = I_x - s = \{r - s : r \in I_x\}$ ,  $\phi_y(0) = y$  e  $\phi_y(t) = \phi_x(t + s)$ , para todo  $t \in I_y$ .*

*c) O conjunto  $D = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\phi(t, x) = \phi_x(t)$  é de classe  $C^k$ . Mais ainda,  $\phi$  satisfaz à equação*

$$D_1 D_2 \phi(t, x) = DX(\phi(t, x)) \cdot D_2 \phi(t, x), \quad D_2 \phi(t, x)|_{t=0} = I_d,$$

para todo  $(t, x) \in D$ .

A demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em [19].

**Definição 1.1.5.** *A aplicação  $\phi : D \rightarrow \Delta$  é chamada de fluxo gerado por  $X$ .*

**Definição 1.1.6.** *Sejam  $\phi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\phi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  os fluxos gerados pelos campos  $X_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente. Diz-se que  $X_1$  é topologicamente conjugado a  $X_2$  quando existe um homeomorfismo  $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ , tal que  $h(\phi_1(t, x)) = \phi_2(t, h(x))$ , para todo  $(t, x) \in D_1$ .*

**Definição 1.1.7.** *Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^k$  é dito hiperbólico se todos os autovalores de  $DX(p)$  têm parte real diferente de zero.*

**Teorema 1.1.2** (Teorema de Hartman-Grobman). *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças  $W$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $V$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X|_W$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)|_V$ .*

A demonstração do Teorema de Hartman-Grobman pode ser encontrada em [20].

**Exemplo 1.1.1.** *Consideremos o seguinte campo de vetores  $X(u, v) = (v, -\sin(u))$ , definido em  $\mathbb{R}^2$ .*

*Note que  $(0, \pi)$  é um ponto singular hiperbólico, pois*

- $X(0, \pi) = (0, 0)$  e
- $DX(0, \pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , cujos autovalores são  $1$  e  $-1$ .

*Assim, segue do Teorema de Hartman-Grobman (1.1.2) que existem vizinhanças  $W$  de  $(0, \pi)$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $V$  de  $(0, 0)$  em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $X|_W$  é topologicamente conjugado a  $DX(0, \pi)|_V$ , que possui um ponto singular do tipo sela em  $(0, 0)$ .*

**Exemplo 1.1.2.** *Ainda considerando o campo dado no exemplo anterior, notemos que  $(0, 0)$  também é um ponto singular, no entanto,*

$$DX(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

*cujos autovalores são  $i$  e  $-i$ . Logo, as hipóteses do Teorema de Hartman-Grobman (1.1.2) não são satisfeitas para o ponto singular  $(0, 0)$ . O estudo deste tipo de ponto singular é feito com detalhes em [13], no capítulo 9.*

## 1.2 Superfícies Regradas

Uma família a 1-parâmetro de retas  $\{\alpha(t), X(t)\}$  é uma correspondência que associa a cada  $t \in I$ , onde  $I$  é um intervalo aberto, um ponto  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$  e uma direção  $X(t)$ , com  $X(t) \neq 0$  e tais que  $\alpha(t)$  e  $X(t)$  sejam ambos diferenciáveis em  $I$ .

**Definição 1.2.1** (Superfície Regrada). *Dada uma família a 1-parâmetro de retas  $\{\alpha(t), X(t)\}$ , a superfície  $S$  parametrizada por*

$$Y(t, v) = \alpha(t) + vX(t), t \in I, v \in \mathbb{R}$$

*é chamada **Superfície Regrada** gerada pela família  $\{\alpha(t), X(t)\}$ . A curva  $\alpha(t)$  é chamada diretriz e as retas  $L_t$  que passam por  $\alpha(t)$  na direção do vetor unitário  $X(t)$  são chamadas de geradores da superfície.*

Suponhamos, a partir daqui, que  $|X(t)| = 1$  e que  $|X'(t)| \neq 0$ .

**Proposição 1.2.1.** *Considere a superfície regradada  $S$  parametrizada por  $Y(t, v) = \alpha(t) + vX(t)$ ,  $t \in I$ ,  $v \in \mathbb{R}$ . Sendo  $|X'(t)| \neq 0$ , é possível obter uma curva  $\beta$ , cujo traço está contido em  $S$ , tal que  $\langle \beta'(t), X'(t) \rangle = 0$ , para todo  $t \in I$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista  $\beta(t) = \alpha(t) + k(t)X(t)$ , tal que  $\langle \beta'(t), X'(t) \rangle = 0$ . Dessa forma, omitindo o parâmetro  $t$  e considerando que  $'$  significa que estamos derivando em relação a  $t$ , segue que:

$$\langle \beta', X' \rangle = \langle \alpha', X' \rangle + k \langle X', X' \rangle = 0,$$

já que  $X(t)$  unitário implica que  $\langle X, X' \rangle = 0$ . Da equação acima, obtemos:

$$k = -\frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle}.$$

Assim, basta definir  $\beta(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X$ , que está em  $S$ , para todo  $t \in I$ .

Para mostrar que  $\beta$  está bem definida, precisamos verificar que não depende da parametrização de  $S$ , ou seja, da escolha da diretriz. Seja  $\bar{\alpha}$  outra diretriz de  $S$ , podemos escrever

$$\alpha(t) + vX(t) = \overline{\alpha(t)} + sX(t),$$

para alguma  $s(v) = s$ . Assim, temos

$$\beta(t) = \alpha - \frac{\langle \alpha', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X \text{ e } \bar{\beta}(t) = \bar{\alpha} - \frac{\langle \bar{\alpha}', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X, \text{ portanto,}$$

$$\beta - \bar{\beta} = \alpha - \bar{\alpha} - \frac{\langle \alpha' - \bar{\alpha}', X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} X.$$

Como  $\alpha - \bar{\alpha} = (s - v) X$ , segue que derivando com relação a  $t$ , obtemos  $\alpha' - \bar{\alpha}' = (s - v) X'$  e assim,

$$\begin{aligned} \beta - \bar{\beta} &= (s - v) X - \frac{\langle X', (s - v) X' \rangle}{\langle X', X' \rangle} \\ &= (s - v) X - (s - v) X \\ &= 0 \Leftrightarrow \beta = \bar{\beta}, \end{aligned}$$

para todo  $t \in I$ .

■

Segue da proposição anterior que tomando a curva  $\beta$  como diretriz, podemos parametrizar a superfície regrada  $S$  por  $Y(t, k) = \beta(t) + kX(t)$ . A curva  $\beta$  da proposição é chamada **Linha de Estricção** da superfície regrada  $S$ . O ponto de interseção de um gerador com a linha de estricção é chamado de **Ponto central** do gerador. O plano tangente à superfície regrada num ponto central também é chamado de **Plano Central**.

**Observação 1.2.1.** *Segue da proposição anterior que a coordenada do ponto central de um gerador em relação a  $X$  é dada por:*

$$k(t) = -\frac{\langle X'(t), \alpha'(t) \rangle}{\langle X'(t), X'(t) \rangle}.$$

Em algumas referências como Weatherburn[22]  $k$  é chamada simplesmente de distância do ponto central à diretriz de  $S$  ao longo do gerador e, em alguns momentos neste texto, iremos usar essa terminologia.

**Observação 1.2.2.** *Note que  $\beta' \perp X'$  e  $X' \perp X$ , assim,  $X \times \beta' = \gamma X'$ , para alguma função real  $\gamma$ . Fazendo o produto interno por  $X'$ , temos:*

$$\begin{aligned} \langle X', X \times \beta' \rangle &= \gamma \langle X', X \rangle \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{[\beta', X', X]}{\langle X', X' \rangle} = P(X). \end{aligned}$$

A função real que associa ao vetor diretor  $X$  o valor  $P(X)$  é chamada *parâmetro de distribuição da superfície regrada*.

**Definição 1.2.2** (Superfícies Desenvolvíveis). *As superfícies regradas que possuem o plano tangente constante ao longo de cada gerador são chamadas superfícies regradas desenvolvíveis.*

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $S$  uma superfície regrada parametrizada por  $Y(t, v) = \beta(t) + vX(t)$ , onde  $\beta$  é a sua linha de estricção. Então*

$$S \text{ é desenvolvível} \Leftrightarrow \text{o parâmetro de distribuição de } S, \text{ dado por } \frac{D}{\langle X', X' \rangle}, \text{ onde } D = [\beta', X', X], \text{ é identicamente nulo.}$$

*Demonstração.* Seja  $N(t, v) = \lambda(t, v)Y_t \times Y_v$  o normal unitário à  $S$ , onde  $\lambda(t, v) = \frac{1}{|Y_t \times Y_v|}$ , assim,  $N_v = \lambda_v Y_t \times Y_v + \lambda(Y_{tv} \times Y_v + Y_t \times Y_{vv})$ . Mas sendo  $Y_t = \beta' + vX'$ ,  $Y_v = X$ ,  $Y_{tv} = X'$  e  $Y_{vv} = 0$ , segue que

$$N_v = \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X.$$



( $\Rightarrow$ ) Suponha  $S$  desenvolvível, assim,  $N_v = \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X = 0$

$$\Rightarrow \langle \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X, X' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_v \langle (\beta' + vX') \times X, X' \rangle + \lambda \langle X' \times X, X' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_v \langle \beta' \times X, X' \rangle + \lambda_v \langle vX' \times X, X' \rangle = 0, \text{ como } X' \perp X' \times X \text{ e } D = [\beta', X', X], \text{ temos } -\lambda_v D = 0.$$

Como  $0 = N_v = \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X$ , temos

$$\begin{aligned} \langle N_v, (\beta' + vX') \times X \rangle &= 0 \\ \langle \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X, (\beta' + vX') \times X \rangle &= 0 \\ -\lambda_v |(\beta' + vX') \times X|^2 &= \lambda \langle X' \times X, (\beta' + vX') \times X \rangle \\ -\lambda_v |(\beta' + vX') \times X|^2 &= v\lambda \langle X' \times X, X' \times X \rangle \\ \lambda_v &= -v \frac{\langle X' \times X, X' \times X \rangle}{|Y_t \times Y_v|^3} \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, como  $-\lambda_v D = 0$  e  $\lambda_v \neq 0$ , temos  $D = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha o parâmetro de distribuição nulo. Assim, temos  $D = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} \langle N_v, Y_t \rangle &= \langle \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X, \beta' + vX' \rangle \\ &= \lambda \langle X \times X', \beta' + vX' \rangle \\ &= \lambda \langle X \times X', \beta' \rangle + \lambda \langle X \times X, vX' \rangle \\ &= -\lambda [\beta', X', X] = \lambda D = 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle N_v, Y_v \rangle = \langle \lambda_v (\beta' + vX') \times X + \lambda X' \times X, X \rangle = 0.$$

Dessa forma, segue que, para  $t$  fixo,  $N$  é constante, pois sabendo que  $|N| = 1$ , temos  $\langle N_v, N \rangle = 0$  e pelo visto acima  $\langle N_v, Y_t \rangle = \langle N_v, Y_v \rangle = 0$ , portanto,  $N_v = 0$ , para  $t$  fixo, o que implica que o plano tangente ao longo de cada gerador é constante. ■

**Observação 1.2.3.** *Seja  $S$  uma superfície regrada parametrizada por  $Y(t, v) = \beta(t) + vX(t)$ , onde  $\beta$  é a sua linha de estricção e suponha  $S$  desenvolvível. Assim,  $[\beta', X', X] = 0$ , portanto, os vetores  $\beta', X'$  e  $X$  são coplanares. Mas sendo  $\beta' \perp X'$  e  $X' \perp X$ , segue que devemos ter  $\beta'$  paralelo a  $X$ , se considerarmos ambos unitários e apontando para o mesmo lado, temos  $Y(t) = \beta + v\beta'$ , ou seja,  $S$  é tangente a  $\beta$ . A curva  $\beta$ , neste caso, é chamada de **limite de regressão** e o ponto de contato de um gerador com  $\beta$  é chamado de **ponto focal** do gerador. Na figura, a curva rosa indica o limite de regressão da superfície regrada*

dada.

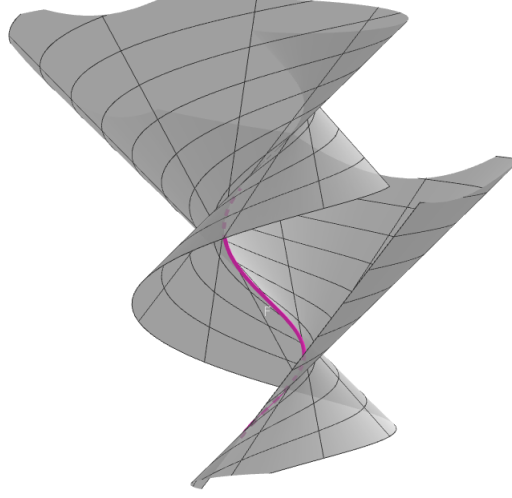


Figura 1.9: Limite de regressão

### 1.3 Linhas de Curvatura

Consideremos  $S$  uma superfície regular e  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco, com  $\alpha(0) = p \in S$  e  $\alpha'(0) = v$ . Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto,  $X : U \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em torno de  $p$  e  $N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v)$  o normal unitário à  $S$ , em coordenadas. Denotemos por  $N(s) = N \circ \alpha(s)$  a restrição do vetor normal à superfície  $S$  à curva  $\alpha$  e por  $T_p S$  o plano tangente à  $S$  em  $p$ .

**Definição 1.3.1** (Curvatura Normal). *A curvatura normal à  $S$  em  $p$  na direção  $v$  é a função  $k_{np} : S^1 \subset T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:*

$$k_{np}(v) = \langle \alpha''(0), N(0) \rangle,$$

onde  $S^1 = \{v \in T_p S : \|v\| = 1\}$ .

**Observação 1.3.1.** *Desde que  $\alpha'(s) \perp N(s)$ , temos que  $\langle \alpha'(s), N(s) \rangle = 0$ , logo, derivando em relação a  $s$ , encontramos:*

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(s), N(s) \rangle + \langle \alpha'(s), (N \circ \alpha)'(s) \rangle &= 0 \\ \langle \alpha''(s), N(s) \rangle &= \langle \alpha'(s), -dN_p(\alpha'(s)) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,  $k_{np}(v) = \langle v, -dN_p(v) \rangle$ .

Sendo  $S^1$  compacto e  $k_n$  contínua (desde que as suas funções componentes o são), segue que existem  $v_1$  e  $v_2$  em  $S^1$ , tais que:

$$\begin{aligned} k_{np}(v_1) &= \min\{\langle v, -dN_p(v) \rangle : v \in S^1\} \\ k_{np}(v_2) &= \max\{\langle v, -dN_p(v) \rangle : v \in S^1\}. \end{aligned}$$

Além disso, sendo  $N : S \rightarrow S^2$ , segue que  $-dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ . No entanto, note que  $N(p) \perp T_p S$  e como  $N(p) \in S^2$ , temos que o vetor  $N(p) \perp T_{N(p)} S^2$ , assim,  $T_p S$  e  $T_{N(p)} S^2$  são paralelos e podemos considerar por uma translação  $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ .

**Proposição 1.3.1.**  $-dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  é uma aplicação linear autoadjunta.

*Demonstração.* Para concluirmos o resultado, basta mostrarmos que  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  é autoadjunta. Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em torno de  $p$ , com  $X(u_0, v_0) = X(q) = p$ . Sabemos que  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  é base de  $T_p S$ , assim, pela linearidade de  $-dN_p$ , basta mostrarmos que

$$\langle dN_p(X_u(q)), X_v(q) \rangle = \langle X_u(q), dN_p(X_v(q)) \rangle. \quad (1.6)$$

Se  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  é uma curva dada por  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  e satisfazendo  $\alpha(0) = X(q) = p$ , temos:

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)) \\ &= u'(0)N_u(q) + v'(0)N_v(q). \end{aligned}$$

Em particular, temos que  $dN_p(X_u(q)) = N_u(q)$  e que  $dN_p(X_v(q)) = N_v(q)$ . Portanto, segue de (1.6) que para concluir o resultado, basta mostrarmos que

$$\langle N_u(q), X_v(q) \rangle = \langle X_u(q), N_v(q) \rangle.$$

Sabemos que  $\langle N(u, v), X_u(u, v) \rangle = \langle N(u, v), X_v(u, v) \rangle = 0$ , assim, derivando essas expressões em relação a  $v$  e  $u$ , respectivamente, e aplicando em  $q$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \langle N_v(q), X_u(q) \rangle + \langle N(q), X_{uv}(q) \rangle &= 0 \\ \langle N_u(q), X_v(q) \rangle + \langle N(q), X_{uv}(q) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Assim, subtraindo as expressões acima, temos:

$$\langle N_u(q), X_v(q) \rangle = \langle X_u(q), N_v(q) \rangle.$$

■

**Observação 1.3.2.** *O teorema espectral para operadores autoadjuntos implica que existe uma base ortonormal de  $T_p S$ , digamos  $B = \{v_1, v_2\}$ , formada por autovetores de  $-dN_p$ , de modo que:*

$$\begin{aligned} -dN_p(v_1) &= k_1 v_1 \\ -dN_p(v_2) &= k_2 v_2, \end{aligned}$$

com  $k_1 \leq k_2$ .

**Proposição 1.3.2.** *Na notação da observação anterior, temos:*

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{np}(v_1) = \min\{\langle v, -dN_p(v) \rangle : v \in S^1\} \\ k_2 &= k_{np}(v_2) = \max\{\langle v, -dN_p(v) \rangle : v \in S^1\}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Consideremos a matriz  $(a_{ij})$  de  $-dN_p$  escrita na base  $\{v_1, v_2\}$ , logo, tal matriz é diagonal, com  $a_{11} = k_1$  e  $a_{22} = k_2$ . Dado  $v \in S^1 \subset T_p S$ , temos que existe  $t \in [0, 2\pi]$ , tal que

$$v = \cos(t)v_1 + \sin(t)v_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} k_{np}(v) &= \langle v, -dN_p(v) \rangle \\ &= \langle \cos(t)v_1 + \sin(t)v_2, k_1 \cos(t)v_1 + k_2 \sin(t)v_2 \rangle \\ &= k_1 \cos^2(t) + k_2 \sin^2(t). \end{aligned}$$

Seja  $f(t) = k_1 \cos^2(t) + k_2 \sin^2(t)$ , logo,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(k_2 - k_1) \sin(t) \cos(t) \\ &= (k_2 - k_1) \sin(2t), \end{aligned}$$

enquanto que

$$f''(t) = 2(k_2 - k_1) \cos(2t).$$

Note que, admitindo  $k_2 - k_1 \geq 0$ , obtemos  $f'(t) = 0$ , o que implica que  $t \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$ . Como  $f(0) = f(\pi)$  e  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ , iremos analisar o teste da derivada segunda para  $t = 0$  e  $t = \frac{\pi}{2}$ . Note que  $f''(0) > 0$  e  $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ , portanto, segue do teste da derivada segunda que  $f$  tem um mínimo em  $f(0) = k_1$  e um máximo em  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k_2$ . Assim,  $k_{np}$  tem um máximo em  $k_{np}(v_2) = k_2$  e mínimo em  $k_{np}(v_1) = k_1$ .



**Definição 1.3.2** (Curvaturas principais e Direções principais). *Na notação da observação anterior, chamamos  $k_1$  e  $k_2$  de curvaturas principais enquanto que  $v_1$  e  $v_2$  são chamados de direções principais.*

**Definição 1.3.3** (Linhas de curvatura). *Uma curva  $\alpha : I \rightarrow S$  é uma linha de curvatura se  $\alpha'(s)$  é uma direção principal para todo  $s \in I$ , ou seja, se  $-dN_p(\alpha'(s)) = \lambda(s)\alpha'(s)$ .*

**Definição 1.3.4** (1ª Forma fundamental). *Dada uma superfície regular  $S$  e  $p \in S$ , definimos a 1ª forma fundamental de  $S$  em  $p$  como a forma quadrática  $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:*

$$I_p(v) = \langle v, v \rangle.$$

*Sendo  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em torno de  $p$ , com  $X(q) = p$  e  $v = aX_u(q) + bX_v(q)$  um vetor genérico em  $T_p S$ , temos:*

$$I_p(v) = a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q),$$

*onde  $E(q) = \langle X_u(q), X_u(q) \rangle$ ,  $F(q) = \langle X_u(q), X_v(q) \rangle$  e  $G(q) = \langle X_v(q), X_v(q) \rangle$  são os coeficientes da 1ª forma.*

**Definição 1.3.5** (2ª Forma fundamental). *Dada uma superfície regular  $S$  e  $p \in S$ , definimos a 2ª forma fundamental de  $S$  em  $p$  como a forma quadrática  $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:*

$$II_p(v) = \langle v, -dN_p(v) \rangle.$$

*Sendo  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  em torno de  $p$ , com  $X(q) = p$ ,  $v = aX_u(q) + bX_v(q)$  um vetor genérico em  $T_p S$  e  $dN_p = [N_u(q), N_v(q)]$  a matriz  $3 \times 2$  de  $dN_p$  em relação à base  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  de  $T_p S$ , temos:*

$$\begin{aligned} II_p(v) &= \langle v, -dN_p(v) \rangle \\ &= \langle aX_u(q) + bX_v(q), -dN_p(v) \rangle \\ &= \langle aX_u(q) + bX_v(q), -aN_u(q) - bN_v(q) \rangle \\ &= a^2 L(q) + 2abM(q) + b^2 J(q), \end{aligned}$$

*onde os termos  $L(q) = \langle X_u(q), -N_u(q) \rangle$ ,  $M(q) = \langle X_u(q), -N_v(q) \rangle = \langle X_v(q), -N_u(q) \rangle$  e  $J(q) = \langle X_v(q), -N_v(q) \rangle$  são os coeficientes da 2ª forma.*

**Definição 1.3.6** (3ª Forma fundamental). *Dada uma superfície regular  $S$  e  $p \in S$ , definimos a 3ª forma fundamental de  $S$  em  $p$  como a forma quadrática  $III_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada*

por:

$$III_p(v) = \langle dN_p(v), dN_p(v) \rangle.$$

**Proposição 1.3.3.** *Sejam  $S$  uma superfície regular e  $p \in S$ . A terceira forma fundamental de  $S$  em  $p$ , definida em (1.3.6), satisfaz a seguinte relação:*

$$III_p(v) = 2H \cdot II_p(v) - K \cdot I_p(v), \quad v \in T_p S, \quad (1.7)$$

onde  $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$  e  $K = k_1 k_2$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais.

*Demonstração.* Consideremos  $e_1$  e  $e_2$  direções principais, tais que  $-dN_p(e_1) = k_1 e_1$  e  $-dN_p(e_2) = k_2 e_2$ . Como  $\{e_1, e_2\}$  constitui uma base ortonormal para  $T_p S$ , escrevamos

$$v = a e_1 + b e_2.$$

Note que

$$-dN_p(v) = a k_1 e_1 + b k_2 e_2,$$

logo,

$$\begin{aligned} III_p(v) &= \langle dN_p(v), dN_p(v) \rangle \\ &= \langle a k_1 e_1 + b k_2 e_2, a k_1 e_1 + b k_2 e_2 \rangle \\ &= a^2 k_1^2 + b^2 k_2^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} 2H \cdot II_p(v) - K \cdot I_p(v) &= (k_1 + k_2) \langle v, -dN_p(v) \rangle - k_1 k_2 \langle v, v \rangle \\ &= (k_1 + k_2) (a^2 k_1 + b^2 k_2) - k_1 k_2 (a^2 + b^2) \\ &= a^2 k_1^2 + b^2 k_2^2. \end{aligned}$$

Portanto,  $III_p(v) = 2H \cdot II_p(v) - K \cdot I_p(v)$ . ■

**Definição 1.3.7** (Ponto Umbílico). *Um ponto  $p \in S$  é dito umbílico se as curvaturas principais em  $p$  coincidem, ou seja,  $k_1(p) = k_2(p)$ .*

**Definição 1.3.8** (Curvatura Média e Curvatura Gaussiana). *Definimos a curvatura média de  $S$  em  $p$  como sendo*

$$H(p) = \frac{\text{tr}(-dN_p)}{2} = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Já a curvatura gaussiana de  $S$  em  $p$  é definida como sendo

$$K(p) = \det(-dN_p) = k_1(p)k_2(p).$$

### 1.3.1 Interpretação geométrica da curvatura normal

Seja  $w$  um vetor unitário de  $T_p S$  e  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva regular de  $S$  parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $X(u(s_0), v(s_0)) = p$  e  $\alpha'(s_0) = w$ . Se a curvatura de  $\alpha$  em  $s_0$  é  $k(s_0) \neq 0$ , temos:

$$\begin{aligned} k_{np}(w) &= II_p(w) = \langle \alpha''(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle \\ &= \langle k(s_0)n(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle \\ &= k(s_0) \cos \theta, \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde  $n(s_0)$  é o normal à  $\alpha$  em  $s_0$  e  $\theta$  é o ângulo entre os vetores unitários  $n(s_0)$  e  $N(u(s_0), v(s_0))$ , enquanto que  $\frac{1}{k(s_0)}$  é o raio do círculo osculador de  $\alpha$  em  $s_0$ .

Escolha a curva  $\alpha$  como sendo a seção normal da superfície determinada por  $w$ , ou seja, a curva que é obtida como a interseção entre  $X(u, v)$  para  $(u, v)$  próximos de  $(u_0, v_0)$  e o plano que passa por  $X(u_0, v_0)$  ortogonal a  $w \times N(u_0, v_0)$ . Nestas condições, a seção normal é o traço da curva regular plana definida por  $\beta(s) = X(u(s), v(s))$  parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $\beta'(s_0) = w$ .

Se  $\beta''(s_0) = 0$ , ou seja,  $k(s_0) = 0$ , temos  $II_p(w) = \langle \beta''(s_0), N(u_0, v_0) \rangle = 0$ . Se  $k(s_0) > 0$ , segue que  $n(s_0) = \pm N(u_0, v_0)$  e, portanto, segue de (1.8) que

$$k_{np}(w) = II_p(w) = \pm k(s_0).$$

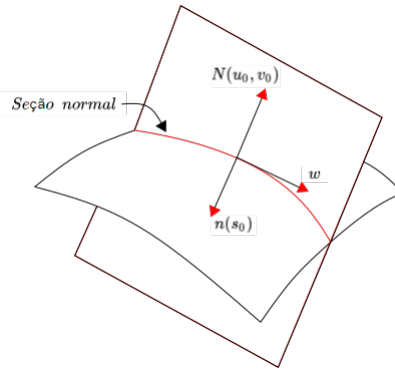


Figura 1.10: Seção normal

No caso em que  $k_{np}(w) = k_1(p)$  é uma curvatura principal não nula, chamamos  $\frac{1}{k_1(p)}$  de raio de curvatura principal, que nada mais é que o raio de curvatura do círculo

osculador da seção normal em  $s_0$ , que também pode ser visto como a coordenada (ou distância em segundo alguns autores) do centro do círculo osculador em relação à reta normal.

**Proposição 1.3.4** (Olinde Rodrigues). *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular  $C$  em  $S$  seja uma linha de curvatura de  $S$  é que*

$$N'(s) = \lambda(s)\alpha'(s),$$

para qualquer parametrização  $\alpha(s)$  de  $C$ , onde  $N(s) = N \circ \alpha(s)$  e  $\lambda(t)$  é uma função diferenciável de  $s$ . Neste caso,  $-\lambda(s)$  é a curvatura principal com direção principal  $\alpha'(s)$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $\alpha$  é uma linha de curvatura, segue que

$$N'(s) = dN_p(\alpha'(s)) = \lambda(s)\alpha'(s).$$

( $\Leftarrow$ ) Imediata, pela definição de linha de curvatura. ■

Utilizando a proposição acima, obtemos a seguinte observação, cujos detalhes estão em [5]:

**Observação 1.3.3** (Equação Diferencial das Linhas de Curvatura). *Sejam  $S$  uma superfície regular,  $p \in S$  e  $X(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em torno de  $p$ . Seja ainda  $C$  uma curva regular conexa numa vizinhança coordenada de  $X$ .  $C$  é uma linha de curvatura se, e somente se, para uma parametrização qualquer  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , as funções  $u(t)$  e  $v(t)$  satisfazem:*

$$(FJ - GM)(v')^2 + (EJ - GL)u'v' + (EM - LF)(u'^2) = 0, \quad (1.9)$$

onde  $E, F, G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental e  $L, M, N$  os coeficientes da segunda forma fundamental.

**Observação 1.3.4.** *Conforme consta em Sotomayor e Gutierrez [12], considerando uma superfície regular  $S$ , segue que fora do conjunto  $U_S$ , que denota o conjunto dos seus pontos umbílicos, as direções principais definem um par  $L_S$  e  $\ell_S$ , de campos de vetores mutuamente ortogonais, chamados de Campos de Linhas Principais em  $S$ .  $L_S$  corresponde às direções de curvatura principal máxima, enquanto que  $\ell_S$  corresponde às direções de curvatura principal mínima. A família das curvas integrais  $F_S$  de  $L_S$  é chamada de folheação principal maximal, enquanto que a família das curvas integrais  $f_S$  de  $\ell_S$  é chamada de folheação principal minimal de  $S$ . Além disso, a cada superfície  $S$  está associado o terno  $P_S = (U_S, L_S, \ell_S)$ , que é chamado por Sotomayor e Gutierrez, em [12], de configuração principal de  $S$ . O Elipsoide, por exemplo, tem a configuração principal apresentada na Figura abaixo.*



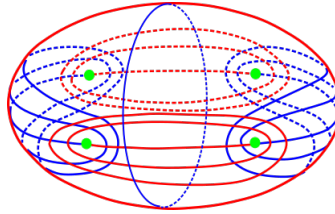


Figura 1.11: Configuração Principal do Elipsoide.

*As curvas em vermelho são as linhas de curvatura associadas às direções de curvatura principal máxima e as azuis associadas às direções de curvatura principal mínima, enquanto que os pontos verdes são os pontos umbilícos. A configuração principal do Elipsoide se deve a Monge, em [10], e foi o primeiro exemplo não trivial de configuração principal.*

# Capítulo 2

## Congruências de Retas

Neste capítulo, tomando como base o Bianchi [1], Eisenhart [6], Forsyth [8], Pottmann [17] e Weatherburn [22], trataremos da teoria das Congruências de retas, definindo formalmente Congruências, bem como as formas de Kummer e a equação das superfícies principais. Nosso intuito é preparar o leitor para o que pretendemos fazer no capítulo 4, que é estudar algumas singularidades que aparecem num tipo específico de congruência no elipsoide.

### 2.1 Definições e exemplos

Um sistema a dois parâmetros  $(u, v)$  de retas no espaço é chamado uma congruência de retas. Consideraremos  $(u, v) \in A$ , onde  $A$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . As normais a uma superfície, por exemplo, constituem uma congruência de retas e ao lidar com essa congruência em particular, podemos considerar os dois parâmetros  $u, v$  como sendo os parâmetros da superfície. Outro exemplo que podemos considerar é a família das retas que intersectam duas curvas dadas.

Uma congruência fica então definida por um par  $\{r(u, v), X(u, v)\}$ , onde  $X(u, v)$  é um vetor unitário que fornece a direção da reta da congruência que passa por  $r(u, v)$ . Consideraremos neste estudo que as funções  $X$  e  $r$  são suaves. O ponto  $r(u, v)$  pode ser tomado como um ponto numa superfície de referência (ou superfície diretora)  $S$ , que é uma superfície que é cortada por todas as retas da congruência.

**Exemplo 2.1.1.** *Seja  $C$  um círculo de raio  $R$ , no plano  $XY$ , centrado na origem e com eixo  $oz$ . Considere a família das retas que intersectam o círculo  $C$  e o seu eixo. Como todas as retas da congruência cortam  $C$ , segue que podemos tomar o plano  $xy$  como superfície diretora. A fim de obter a família  $\{X(u, \theta), r(u, \theta)\}$  que caracteriza a congruência, consideremos  $Q$  um ponto sobre o eixo  $oz$  que dista  $u$  da origem e um ponto  $r \in C$ , tal que o ângulo  $x\hat{O}r$  seja  $\theta$ . Assim,*

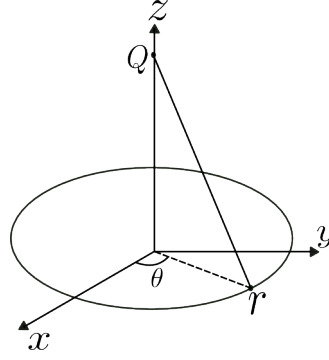


Figura 2.1: Reta qualquer na congruência.

$$r = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0),$$

enquanto que o vetor unitário na direção da reta que liga os pontos  $r$  e  $Q$  é dado por

$$X(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (-R \cos \theta, -R \sin \theta, u).$$

Dessa forma, a congruência de retas considerada é caracterizada por

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (-R \cos \theta, -R \sin \theta, u), (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \right\}.$$

■

**Definição 2.1.1** (Representação esférica). *Dada uma reta  $\{r(u_0, v_0), X(u_0, v_0)\}$  de uma congruência de retas, definimos a sua representação esférica como sendo o raio da esfera unitária que é paralelo a ela, ou seja,  $X(u_0, v_0)$ , desde que tomamos  $X(u_0, v_0)$  unitário.*

**Exemplo 2.1.2.** *Se considerarmos a congruência dada no exemplo (2.1.1) e a reta que passa por  $(0, 0, 2)$  e por  $(0, R, 0)$ , segue que a sua representação esférica é dada por*

$$X(2, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4}} (0, -R, 2).$$

**Definição 2.1.2** (Formas Quadráticas de Kummer). *Sejam  $\mathcal{C} = \{X(u, v), r(u, v)\}$  uma congruência de retas definida num aberto do  $\mathbb{R}^2$ ,  $C$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco sobre a superfície de referência  $S$  e  $r(s) = r(u(s), v(s))$  os pontos dessa curva atravessados pelas retas da congruência. Sendo  $X(s) = X(u(s), v(s))$ ,  $p = r(q)$ , onde  $(u(0), v(0)) = q$  e  $v = u'(0)r_u(q) + v'(0)r_v(q) \in T_p S$ , associamos à congruência  $\mathcal{C}$  duas formas quadráticas, a saber,*

1. Primeira Forma de Kummer:

$I^p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$I^p(v) = eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2,$$

onde  $e = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $f = \langle X_u, X_v \rangle$  e  $g = \langle X_v, X_v \rangle$ , com  $e$ ,  $f$  e  $g$  avaliados em  $q$ . Desde que  $X(u, v)$  está sendo considerado unitário, segue podemos tratá-lo como o normal unitário à esfera neste ponto, logo, omitindo os parâmetros

$$X = \frac{X_u \times X_v}{h},$$

onde  $h^2 = |X_u \times X_v|^2 = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle^2$ . Na última igualdade, usamos a identidade de Lagrange.

## 2. Segunda Forma de Kummer:

$II^p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$II^p(v) = au'^2 + (b' + b)u'v' + cv'^2,$$

onde  $a = \langle r_u, X_u \rangle$ ,  $b = \langle r_v, X_u \rangle$ ,  $b' = \langle r_u, X_v \rangle$  e  $c = \langle r_v, X_v \rangle$ , todos avaliados em  $q$ . Os produtos internos vistos acima fazem sentido, desde que estamos olhando para  $T_p S$  e para o espaço gerado por  $X_u(q)$  e  $X_v(q)$  como subespaços do  $\mathbb{R}^3$ .

Neste estudo, consideraremos que a primeira das formas quadráticas que acabamos de apresentar é definida positiva, assim,  $h^2 = eg - f^2 > 0$  em  $U$ .

**Definição 2.1.3** (Superfícies de Congruência). *As retas da congruência que cortam uma curva qualquer  $C$  na superfície diretora formam uma superfície regrada  $\Sigma$ , chamada **Superfície de Congruência**. Dizemos que cada uma das superfícies de congruência passa através das retas que estão sobre ela. Qualquer superfície de congruência é representada por uma curva na esfera unitária, que é chamada a sua representação esférica. Essa curva é o local dos pontos sobre a esfera que representam as retas que estão sobre a superfície regrada.*

**Exemplo 2.1.3.** *Considere a congruência formada pelas retas que intersectam o eixo  $oz$  e o plano  $xy$ , de modo que se uma reta toca  $oz$  em  $(0, 0, \theta)$ , deve tocar o plano  $xy$  em pontos da forma  $(u \cos \theta, u \sin \theta, 0)$ . Tomemos o plano  $xy$  como a superfície diretora  $S$ . Note que a congruência é caracterizada por  $\{X(u, \theta), r(u, \theta)\}$ , onde*

$$X(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \theta^2}} (-u \cos \theta, -u \sin \theta, \theta)$$

$$r(u, \theta) = (u \cos \theta, u \sin \theta, 0).$$

Seja  $C$  círculo de centro na origem e raio 1 em  $S$  e considere a superfície de congruência gerada pelas retas da congruência que cortam  $C$ . Como  $C$  é dado por:

$$r(1, \theta) = \alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

segue que as retas da congruência que o intersectam devem ter vetor diretor

$$X(1, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} (-\cos \theta, -\sin \theta, \theta).$$

Logo, a representação esférica dessa superfície de congruência é:

$$\beta(\theta) = X(1, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} (-\cos \theta, -\sin \theta, \theta).$$

Graficamente, temos:

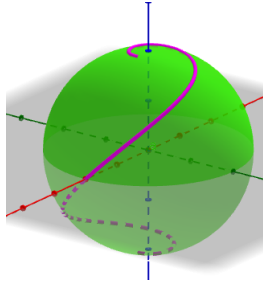


Figura 2.2: Representação esférica.

A superfície de congruência, que é dada por  $Y(t, \theta) = \alpha(\theta) + t\beta(\theta)$ , é exibida na imagem a seguir:

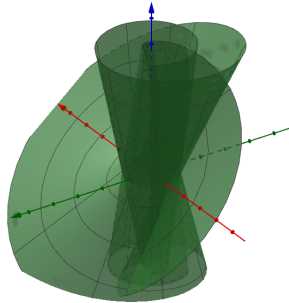


Figura 2.3: Superfície de congruência.

### 2.1.1 Limites e Planos Principais

Seja  $\{X(u_0, v_0), r(u_0, v_0)\}$  uma reta da congruência  $\mathcal{C} = \{X(u, v), r(u, v)\}$ ,  $C$  uma curva na superfície diretora, que é cortada pela reta dada e  $\Sigma$  a superfície de congruência correspondente. Seja  $s$  o comprimento de arco da curva  $C$ , considere  $(u(s_0), v(s_0)) = (u_0, v_0)$ ,  $X(s) = X(u(s), v(s))$  e  $r(s) = r(u(s), v(s))$ . Conforme visto na observação (1.2.1), a coordenada do ponto central da reta em relação à superfície de congruência associada à curva  $C$  é dada por:

$$\begin{aligned} k &= -\frac{\langle r', X' \rangle}{|X'|^2} \\ &= -\frac{\langle u'(s_0)r_u(u_0, v_0) + v'(s_0)r_v(u_0, v_0), u'(s_0)X_u(u_0, v_0) + v'(s_0)X_v(u_0, v_0) \rangle}{\langle u'(s_0)X_u(u_0, v_0) + v'(s_0)X_v(u_0, v_0), u'(s_0)X_u(u_0, v_0) + v'(s_0)X_v(u_0, v_0) \rangle} \\ &= -\frac{a(u_0, v_0)\mu^2 + (b + b')(u_0, v_0)\mu\xi + c(u_0, v_0)\xi^2}{e(u_0, v_0)\mu^2 + 2f(u_0, v_0)\mu\xi + g(u_0, v_0)\xi^2}, \text{ onde } (\mu, \xi) = (u'(s_0), v'(s_0)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Note que sendo  $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$ , temos que  $w = \alpha'(s_0) = u'(s_0)r_u(q) + v'(s_0)r_v(q)$ , onde  $q = (u_0, v_0)$ , logo,  $k$  é uma função que associa a  $(\mu, \xi) = (u'(s_0), v'(s_0))$  ao valor

$$k(v) = k(\mu, \xi) = -\frac{a(u_0, v_0)\mu^2 + (b + b')(u_0, v_0)\mu\xi + c(u_0, v_0)\xi^2}{e(u_0, v_0)\mu^2 + 2f(u_0, v_0)\mu\xi + g(u_0, v_0)\xi^2} = -\frac{II^p(w)}{I^p(w)},$$

onde  $p = r(q)$ .

**Definição 2.1.4.** *Sejam*

- $\mathcal{C}$  uma congruência
- $r(u, v)$  é uma parametrização da superfície de referência  $S$  (regular);
- $\alpha(s) = r(u(s), v(s))$  uma curva sobre  $S$ ;
- $(u(0), v(0)) = q$  e  $w = \mu r_u(q) + \xi r_v(q) \in T_p S$ .

Definimos  $k : T_p S - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função que associa  $w$  a

$$\begin{aligned} k(w) = k(\mu, \xi) &= -\frac{a(q)\mu^2 + (b + b')(q)\mu\xi + c(q)\xi^2}{e(q)\mu^2 + 2f(q)\mu\xi + g(q)\xi^2} \\ &= -\frac{II^p(w)}{I^p(w)}. \end{aligned}$$

Tomando  $(\mu, \xi)$  restrito a um subconjunto compacto, segue que  $k$  possui valores máximo e mínimo, que denotaremos por  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente. Sendo  $\lambda = \frac{\mu}{\xi}$ , temos

que a derivada de  $k$  em relação à  $\lambda$  nos fornece:

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda} = -\frac{[2fa - (b + b')e]\lambda^2 + 2(ga - ec)\lambda + [g(b + b') - 2fc]}{(e\lambda^2 + 2f\lambda + g)^2}$$

Assim, os valores máximo e mínimo são obtidos quando fazemos:

$$[2fa - (b + b')e]\lambda^2 + 2(ga - ec)\lambda + [g(b + b') - 2fc] = 0, \quad (2.2)$$

.

Tomando  $(\mu_0, \xi_0)$ , tal que  $k_0 = k(\mu_0, \xi_0)$  é um dos valores extremos, segue que  $\frac{\partial k}{\partial \mu}(\mu_0, \xi_0) = \frac{\partial k}{\partial \xi}(\mu_0, \xi_0) = 0$ . Da igualdade anterior, obtemos as seguintes expressões:

$$-2\mu \left( \frac{b + b'}{2} + fk_0 \right) + 2\xi (gk_0 + c) = 0$$

$$-2\mu (a + ek_0) - 2\xi \left( \frac{b + b'}{2} + fk_0 \right) = 0$$

O que nos diz que  $(\mu_0, \xi_0)$  é solução não singular do sistema

$$\begin{cases} \mu \left( \frac{b + b'}{2} + fk_0 \right) + \xi (gk_0 + c) = 0 \\ \mu (a + ek_0) + \xi \left( \frac{b + b'}{2} + fk_0 \right) = 0 \end{cases},$$

portanto,

$$\begin{vmatrix} \frac{b + b'}{2} + fk_0 & gk_0 + c \\ a + ek_0 & \frac{b + b'}{2} + fk_0 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos diz que:

$$k_0^2 (ef - g^2) + k_0 [ag + ec - f(b + b')] + \left[ ac - \left( \frac{b + b'}{2} \right)^2 \right] = 0.$$

Sendo  $k_1$  e  $k_2$  soluções da equação acima, obtemos:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = \frac{f(b + b') - ag - ec}{eg - f^2} \\ k_1 k_2 = \frac{4ac - (b + b')^2}{4(eg - f^2)} \end{cases}, \quad (2.3)$$

**Definição 2.1.5** (Pontos Limites e Superfícies Principais). *Os pontos na reta determinados por  $k_1$  e  $k_2$ , dados em (2.3) são chamados **pontos limites** da reta considerada. Eles são os limitantes do segmento na reta contendo os pontos centrais associados às diversas superfícies regradas que contém a reta considerada. As duas superfícies regradas que passam através da reta dada e são determinadas por (2.2) são chamadas **superfícies principais** da reta.*

Na imagem abaixo, ilustramos os pontos limites (em azul e vermelho) e as curvas dadas pela equação (2.2) (em azul e vermelho), que são diretrizes das superfícies principais, que também chamaremos de **curvas principais**.

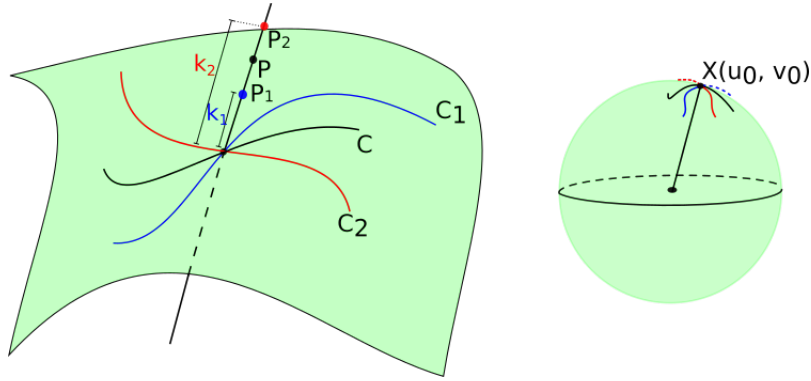


Figura 2.4: Pontos limites, curvas sobre a superfície diretora e sua representação esférica.

Caso existam, os planos tangentes às superfícies principais nos pontos limites contêm a reta considerada e a reta perpendicular comum a ela e a um gerador consecutivo não coplanar. Estes planos tangentes são chamados **planos principais**.

**Observação 2.1.1.** *Conforme o observado quando obtivemos a expressão (2.2), uma curva  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  será a representação esférica de uma superfície principal se satisfizer:*

$$u'(s)^2[2fa - e(b + b')] + 2u'(s)v'(s)(ag - ec) + v'(s)^2[g(b + b') - 2fc] = 0, \quad (2.4)$$

onde os coeficientes das formas de Kummer estão sendo avaliados em  $(u(s), v(s))$ . Chamamos a equação acima de **Equação das superfícies principais** ou **Equação das curvas principais**. Note que as direções determinadas por  $\lambda = \frac{v'}{u'}$  na superfície diretora da congruência, para as quais  $k$  assume valores máximos e mínimos, são obtidas através da equação acima.

**Exemplo 2.1.4.** *Neste exemplo, considerando a congruência de retas dada no exemplo (2.1.1), encontraremos seus pontos limites e os planos principais para a reta que passa*



por  $(0, 0, 2)$  e pelo ponto  $(0, R, 0) \in C$ . Sabendo que a congruência é caracterizada por

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (-R \cos \theta, -R \sin \theta, u), (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \right\},$$

temos:

- $X_u(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{(R^2 + u^2)^3}} (Ru \cos \theta, Ru \sin \theta, R^2)$
- $X_\theta(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (R \sin \theta, -R \cos \theta, 0)$
- $r_u(u, \theta) = (0, 0, 0)$
- $r_\theta(u, \theta) = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$ .

Como a reta que queremos considerar é obtida com os parâmetros sendo  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , segue que:

- $e = \frac{R^2}{(R^2 + 4)^2}$
- $f = 0$
- $g = \frac{R^2}{R^2 + 4}$
- $a = 0$
- $b = b' = 0$
- $c = -\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + 4}}$ .

Sabemos que os valores de máximo e mínimo de  $k$  são raízes de

$$k^2(f^2 - eg) + k[f(b + b') - ag - ce] + \left[ \frac{(b + b')^2}{4} - ac \right] = 0,$$

que se reduz a

$$k^2 \left[ -\frac{R^4}{(R^2 + 4)^2} \right] + k \left[ \frac{R^4}{\sqrt{(R^2 + 4)^3}} \right] = 0,$$

cujas soluções são  $k_1 = 0$  e  $k_2 = \sqrt{R^2 + 4}$ , dessa forma, os pontos limites são justamente  $(0, R, 0)$  e  $(0, 0, 2)$ . Já a equação das superfícies principais

$$u'(s)^2[2fa - e(b + b')] + 2u'(s)\theta'(s)(ag - ec) + \theta'(s)^2[g(b + b') - 2fc] = 0,$$

se reduz a

$$2u'(s)\theta'(s) \left[ \frac{R^4}{\sqrt{(R^2 + u^2)^3}} \right] = 0.$$

$$\Rightarrow u'(s)\theta'(s) = 0.$$

Assim,  $X(2, \theta)$  e  $X\left(u, \frac{\pi}{2}\right)$  são as representações esféricas das superfícies principais através da reta considerado.

- Construindo a superfície regrada associada a  $u' = 0$  que passa pela reta considerada, ou seja, associada a  $u = 2$ .

Sabemos que a nossa diretriz é o círculo  $\beta(\theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0)$ . Assim, a superfície regrada em questão é gerada pela família a 1 parâmetro de retas  $\{\beta(\theta), X(2, \theta)\}$ , logo, é dada por:

$$Y(\theta, v) = \beta(\theta) + vX(2, \theta)$$

$$= (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) + v \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4}} (-R \cos \theta, -R \sin \theta, 2),$$

que é um cone com vértice em  $(0, 0, 2)$ , portanto, não temos plano principal neste ponto.

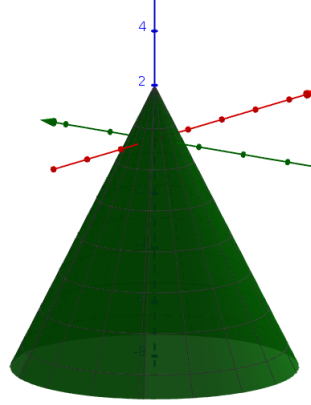


Figura 2.5: Superfície principal associada a  $u = 2$ .

Vamos calcular o plano principal em  $Y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, R, 0)$ .

$$Y_\theta\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = (-R, 0, 0)$$

$$Y_v\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(0, \frac{-R}{\sqrt{R^2 + 4}}, \frac{2}{\sqrt{R^2 + 4}}\right).$$

Fazendo  $Y_\theta \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) \times Y_v \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ , obtemos que  $N_1 = (0, -2, R)$  é o vetor normal ao plano considerado, logo, sabendo que esse plano contém o ponto  $(0, R, 0)$ , segue sua equação é:

$$\begin{aligned} \langle (x - 0, y - R, z - 0), (0, -2, R) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow -2y + zR &= -2R. \end{aligned}$$

- Construindo a superfície principal associada a  $\theta' = 0$  que contém a reta considerada, ou seja, que está associada a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

A diretriz, neste caso, é  $\beta \left( \frac{\pi}{2} \right) = (0, R, 0)$ . Assim, de modo análogo ao caso anterior, a superfície regradada é parametrizada por

$$\begin{aligned} Z(u, v) &= (0, R, 0) + vX \left( u, \frac{\pi}{2} \right) \\ &= (0, R, 0) + v \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (0, -R, u), \end{aligned}$$

que é a região do plano  $yz$  em destaque na figura abaixo.

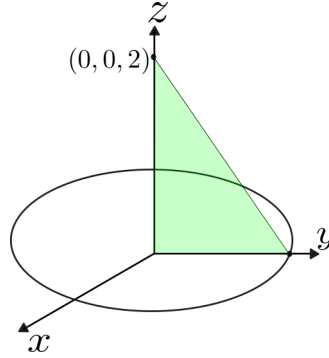


Figura 2.6: Superfície principal associada a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Portanto, os planos principais coincidem com o plano  $yz$ .

■

**Proposição 2.1.1.** *Seja  $\{X(q), r(q)\}$  uma reta de uma congruência dada e considere  $k_1 = k(\mu_1, \xi_1)$  e  $k_2 = k(\mu_2, \xi_2)$ , com  $k_1 \neq k_2$ , os valores extremos da função  $k$ , dada em (2.1), para a reta considerada. Então*

$$\begin{aligned} w_1 &= \mu_1 X_u(q) + \xi_1 X_v(q) \\ w_2 &= \mu_2 X_u(q) + \xi_2 X_v(q) \end{aligned}$$

são perpendiculares.

*Demonstração.* Como  $(\mu_1, \xi_1)$  e  $(\mu_2, \xi_2)$  são valores extremos de  $k$ , segue que as derivadas parciais de  $k$  são nulas nesses pontos, assim, obtemos

$$\mu_1(a + ek_1) + \xi_1 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_1 \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$\mu_1 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_1 \right) + \xi_1(gk_1 + c) = 0 \quad (2.6)$$

e

$$\mu_2(a + ek_2) + \xi_2 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_2 \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$\mu_2 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_2 \right) + \xi_2(gk_2 + c) = 0. \quad (2.8)$$

Fazendo as seguintes operações:  $\mu_1 * (2.7) - \mu_2 * (2.5)$ , obtemos

$$\mu_2\mu_1e(k_2 - k_1) + \mu_2\xi_2 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_2 \right) - \mu_2\xi_1 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_1 \right) = 0, \quad (2.9)$$

enquanto que se fizermos  $\xi_1 * (2.8) - \xi_2 * (2.6)$ , obtemos

$$\xi_1\xi_2g(k_2 - k_1) + \mu_2\xi_1 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_2 \right) - \mu_1\xi_2 \left( \frac{b + b'}{2} + fk_1 \right). \quad (2.10)$$

Somando as equações (2.9) e (2.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \mu_1\mu_2e(k_2 - k_1) + \xi_1\xi_2g(k_2 - k_1) + \mu_1\xi_2f(k_2 - k_1) + \mu_2\xi_1f(k_2 - k_1) &= 0 \\ (k_2 - k_1) [\mu_1\mu_2e + \xi_1\xi_2g + \mu_1\xi_2f + \mu_2\xi_1f] &= 0 \\ (k_2 - k_1)\langle w_1, w_2 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Como  $k_1 \neq k_2$ , temos que  $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ , ou seja,  $w_1$  e  $w_2$  são perpendiculares. ■

### 2.1.2 Fórmula de Hamilton

Para que na equação (2.4) tenhamos as curvas coordenadas (na esfera) determinando as superfícies principais, devemos ter tal equação reduzida a  $u'v' = 0$ , para isto, basta que:

$$\begin{cases} 2fa - e(b + b') = 0 \\ 2fc - g(b + b') = 0 \end{cases}. \quad (2.11)$$

**Proposição 2.1.2.** *Suponha que coeficientes das duas formas quadráticas de Kummer não são proporcionais, ou seja, que estamos considerando os pontos limites distintos. Então*

$f = b + b' = 0$  é uma condição necessária e suficiente para que tenhamos (2.11).

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $f = b + b' = 0$ , segue diretamente que (2.11) vale. Suponha que vale (2.11).

( $\Leftarrow$ ) Suponha que (2.11) vale.

- Se  $f \neq 0$  e  $b + b' = 0$ , temos por (2.11) que  $a = c = b + b' = 0$ . Absurdo, pois assim, os coeficientes seriam múltiplos;
- Se  $f = 0$  e  $b + b' \neq 0$ , temos por (2.11) que  $e = f = g = 0$ . Absurdo, pois assim,  $eg - f^2 = 0$ ;
- Se  $f \neq 0$  e  $b + b' \neq 0$ , temos por (2.11) que  $\frac{f}{b + b'} = \frac{e}{a} = \frac{g}{c} = \lambda$ . Absurdo, pois assim, os coeficientes seriam múltiplos.

■

Note que  $f = 0$  nos diz que  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$  e como  $X_u$  e  $X_v$  são os vetores tangentes às curvas coordenadas sobre a esfera, segue que tais curvas são ortogonais. Além disso, conforme consta em [8] podemos escolher os parâmetros  $u$  e  $v$  de modo que  $f = b + b' = 0$ .

**Proposição 2.1.3** (Fórmula de Hamilton). *Seja  $\mathcal{C} = \{X(u, v), r(u, v)\}$  uma congruência de retas tal que  $f = b + b' = 0$ . Seja  $\{X(u_0, v_0), r(u_0, v_0)\}$  uma reta dessa congruência cujos valores limites são  $k_1$  e  $k_2$ . Então existe um ângulo  $\theta$  tal que para a reta considerada, temos:*

$$k = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \quad (2.12)$$

*Demonstração.* Seja  $C$  uma curva sobre a superfície de referência parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ ,  $X(s) = X(u(s), v(s))$  e  $r(s) = r(u(s), v(s))$ . Consideremos dois raios consecutivos não coplanares  $X$ ,  $X + X'$  e  $l$  a reta que é perpendicular a ambos. O vetor diretor de  $l$  deve ser perpendicular a  $X$  e  $\frac{X'}{d\sigma}$ , onde  $d\sigma = |X'|$  é o elemento de arco da esfera unitária correspondente a  $X'$ , ou seja,  $d\sigma = \sqrt{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2}$ . Mas,  $\frac{X'}{d\sigma}$  e  $X$  são dois vetores unitários perpendiculares, dessa forma, o vetor diretor de  $l$  é dado por:

$$w = \frac{X'}{d\sigma} \times X,$$

logo,

$$w = \left( X_u \frac{u'}{d\sigma} + X_v \frac{v'}{d\sigma} \right) \times \left( \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{eg}} \right).$$

Sendo  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , temos que

$$\begin{aligned} X_u \times (X_u \times X_v) &= (x_u y_u y_v - y_u^2 x_v - z_u^2 x_v + x_u z_u z_v) \vec{i} + (y_u z_u z_v - z_u^2 y_v - x_u^2 y_v + x_u x_v y_u) \vec{j} \\ &\quad + (z_u x_v x_u - x_u^2 z_v - y_u^2 z_v + y_u y_v z_u) \vec{k}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $x_u^2 x_v$  na primeira coordenada,  $y_u^2 y_v$  na segunda,  $z_u^2 z_v$  na terceira e considerando que  $f = 0$ , temos:

$$X_u \times (X_u \times X_v) = (x_u f - x_v e, y_u f - y_v e, z_u f - z_v e) = -e X_v.$$

Analogamente, temos que:

$$X_v \times (X_u \times X_v) = g X_u.$$

Dessa forma,

$$w = \frac{1}{\sqrt{eg}d\sigma} (gX_u v' - eX_v u') \quad (2.13)$$

Como estamos supondo  $f = b + b' = 0$ , seque que a equação das superfícies principais se reduz a  $u'v' = 0$ . Assim, a expressão do vetor  $w$  para as superfícies principais  $v' = 0$  e  $u' = 0$  é, respectivamente:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-1}{\sqrt{g}} X_v \\ w_2 &= \frac{-1}{\sqrt{e}} X_u, \end{aligned} \quad (2.14)$$

que são perpendiculares. Como os planos tangentes a uma superfície de congruência contêm o gerador considerado e o vetor diretor da reta perpendicular comum ao gerador e a um gerador vizinho não-coplanar, segue de (2.14) que os planos principais são perpendiculares. Seja  $\theta$  o ângulo entre o vetor  $w$ , no caso geral (2.13) e o vetor  $w_1$  correspondente à superfície principal determinada por  $v' = 0$ . Assim:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \left\langle \frac{-1}{\sqrt{g}} X_v, \frac{1}{\sqrt{eg}d\sigma} (gX_u v' - eX_v u') \right\rangle = \frac{\sqrt{e}u'}{d\sigma} \\ \sin \theta &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{e}} X_u, \frac{1}{\sqrt{eg}d\sigma} (gX_u v' - eX_v u') \right\rangle = \frac{\sqrt{g}v'}{d\sigma}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

No cálculo do  $\sin \theta$  levamos em conta o fato de  $X_u$  e  $X_v$  serem perpendiculares. Sendo

$f = b + b' = 0$ , temos ainda que:

$$k = -\frac{au'^2 + cv'^2}{eu'^2 + gv'^2}.$$

Como os pontos limites ocorrem para  $v' = 0$  e  $u' = 0$ , temos  $k_1 = -\frac{a}{e}$  e  $k_2 = -\frac{c}{g}$ , o que implica:

$$k = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \quad (2.16)$$

como queremos demonstrar. ■

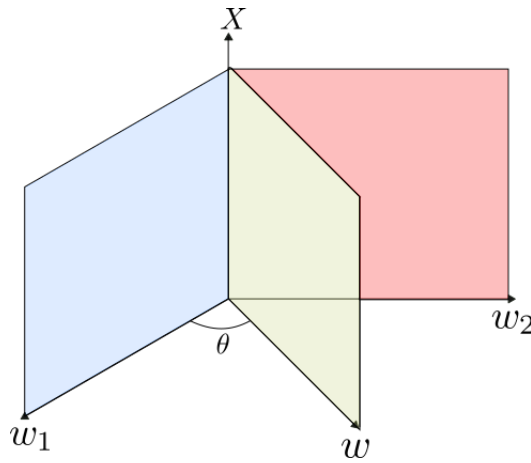


Figura 2.7: Posição relativa dos planos centrais em relação aos planos principais.

**Observação 2.1.2.** Sabemos que o normal à superfície de congruência através da reta com vetor diretor  $X$  é perpendicular ao próprio  $X$  e também ao vetor  $w$ , na notação da proposição anterior, pois ambos estão no plano tangente, portanto, o normal à superfície de congruência é paralelo a

$$X \times \left( \frac{X'}{d\sigma} \times X \right),$$

ou seja, é paralelo a  $\frac{X'}{d\sigma}$ . Assim, o normal à superfície de congruência é paralelo ao tangente à representação esférica da superfície.

### 2.1.3 Focos e Planos Focais

Nesta seção, estudaremos as superfícies de congruência que são desenvolvíveis, ou seja, aquelas que possuem planos tangentes constantes ao longo dos seus geradores. Dada uma congruência de retas  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ , suponhamos  $\Sigma$  uma superfície de congruência

que é desenvolvível, assim, conforme consta na observação (1.2.3), seus geradores possuem pontos focais (ou focos) que são os pontos de tangência com o limite de regressão. Denotemos por  $\rho(u(s), v(s))$  a coordenada do ponto focal em relação a  $X(u(s), v(s))$ , assim, o limite de regressão é parametrizado por

$$R(u(s), v(s)) = r(u(s), v(s)) + \rho(u(s), v(s))X(u(s), v(s)),$$

onde  $s$  é o comprimento de arco da curva  $C$  da superfície de referência que está associada à  $\Sigma$ .

Ainda pelo visto na observação (1.2.3), temos que  $R'$  é paralelo a  $X$ , logo,

$$r_u u' + r_v v' + \rho' X + \rho (X_u u' + X_v v')$$

é paralelo a  $X$  e portanto, perpendicular a  $X_u$  e  $X_v$ . Tomando o produto escalar por  $X_u$  e  $X_v$ , obtemos:

$$\begin{cases} (au' + bv') + \rho(eu' + fv') = 0 \\ (b'u' + cv') + \rho(fu' + gv') = 0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

onde  $a, b, b', c, e, f$  e  $g$  são os coeficientes das formas de Kummer.

**Proposição 2.1.4.** *Através de cada reta da congruência, passam duas superfícies de congruência desenvolvíveis, cada uma com seu limite de regressão. Cada reta da congruência é, portanto, tangente a duas curvas no espaço (os limites de regressão), com os pontos de contato sendo os seus focos.*

*Demonstração.* De (2.17), temos:

$$\rho = -\frac{au' + bv'}{eu' + fv'} = -\frac{b'u' + cv'}{fu' + gv'}, \quad (2.18)$$

onde  $b'$  não indica derivada, mas um dos coeficientes da segunda forma de Kummer. Da igualdade (2.18), temos:

$$\begin{vmatrix} au' + bv' & b'u' + cv' \\ eu' + fv' & fu' + gv' \end{vmatrix} = 0, \quad (2.19)$$

o que nos fornece:

$$(af - eb')u'^2 + (ag + bf - ec - b'f)u'v' + (bg - cf)v'^2 = 0, \quad (2.20)$$

que é uma equação quadrática em  $\frac{u'}{v'}$ , nos dando duas direções para as quais uma superfície de congruência  $\Sigma$ , através de uma reta considerada, é desenvolvível. Chamaremos (2.20)



de **Equação das superfícies desenvolvíveis**. ■

Note que os focos das retas da congruência satisfazem

$$F(u, v) = r(u, v) + \rho(u, v)X(u, v).$$

O conjunto dos focos das retas é chamado de **Conjunto focal da congruência**, que poderá ser uma superfície (neste caso, chamamos de Superfície focal) ou se reduzir a curvas, como mostraremos no exemplo (2.1.5).

Considere uma reta da congruência e o plano tangente à superfície de congruência desenvolvível (através dessa reta) no foco, chamamos esse plano de **Plano Focal**. Desde que existem duas superfícies regradas desenvolvíveis através de cada reta da congruência, segue que cada reta tem dois focos e dois planos focais associados.

**Proposição 2.1.5.** *Sejam  $\rho_1$  e  $\rho_2$  as coordenadas dos focos de uma dada reta de uma congruência, então:*

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = \frac{f(b + b') - ag - ec}{eg - f^2} \\ \rho_1 \rho_2 = \frac{ac - bb'}{eg - f^2}. \end{cases},$$

onde  $a, b, b', c, e, f$  e  $g$  são os coeficientes das formas de Kummer.

*Demonstração.* De (2.17), obtemos  $\frac{u'}{v'} = -\frac{b + \rho f}{a + e\rho} = -\frac{c + \rho g}{b' + \rho f}$ , o que implica:

$$\begin{vmatrix} a + e\rho & b + \rho f \\ b' + \rho f & c + \rho g \end{vmatrix} = 0,$$

assim,

$$h^2 \rho^2 + [ag - (b + b')f + ce]\rho + (ac - bb') = 0, \quad (2.21)$$

onde  $h^2 = eg - f^2$ . As soluções de (2.21) são as coordenadas, em  $X$ , dos dois focos (em algumas referências, estes valores são chamados de distâncias dos focos às superfícies diretoras). Denotemos por  $\rho_1$  e  $\rho_2$  as raízes de (2.21), logo:

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = \frac{f(b + b') - ag - ec}{eg - f^2} \\ \rho_1 \rho_2 = \frac{ac - bb'}{eg - f^2}. \end{cases}. \quad (2.22)$$
■

Comparando (2.22) com (2.3), temos:

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = k_1 + k_2 \\ (k_1 - k_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2 = \frac{(b - b')^2}{eg - f^2} \end{cases} \quad (2.23)$$

A última das igualdades de (2.23) vem do seguinte fato:

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2)^2 - (\rho_1 - \rho_2)^2 &= k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2 - \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 - \rho_2^2 \\ &= (k_1^2 + k_2^2) - 2k_1k_2 - (\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2\rho_1\rho_2 \\ &= [(k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2] - 2k_1k_2 - [(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2] + 2\rho_1\rho_2 \\ &= -4k_1k_2 + 4\rho_1\rho_2, \text{ pois } k_1 + k_2 = \rho_1 + \rho_2 \\ &= 4(\rho_1\rho_2 - k_1k_2) \\ &= \frac{(b - b')^2}{eg - f^2}. \end{aligned}$$

**Observação 2.1.3.** Da primeira relação em (2.23), segue que o ponto médio entre os pontos limites e entre os focos é o mesmo. Tal ponto será chamado de **Ponto Médio** da reta. Note que os pontos médios satisfazem  $\mathcal{M}(u, v) = r(u, v) + \frac{k_1 + k_2}{2}(u, v)X(u, v)$ . O conjunto dos pontos médios de todas as retas será chamado de **Superfície do Meio** da congruência.

**Observação 2.1.4.** Observamos na segunda relação em (2.23) que, se  $b \neq b'$ , o segundo membro é sempre positivo, assim, a distância entre os focos é sempre menor que a distância entre os pontos limites. As duas distâncias são iguais se, e somente se,  $b = b'$ . Assim, em cada reta distinguimos cinco pontos importantes, os dois focos, o ponto médio e dois pontos limites, com os focos entre os pontos limites.

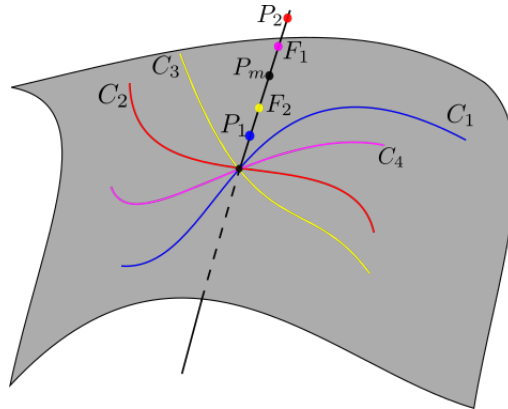


Figura 2.8: Pontos importantes numa reta da congruência.

Na Figura (2.8), indicamos por  $C_1$  e  $C_2$  as curvas diretrizes das superfícies prin-

cipais. Já as curvas  $C_3$  e  $C_4$  são as curvas diretrizes das superfícies desenvolvíveis. Os pontos  $P_i$  indicam os pontos limites, os pontos  $F_i$  os focos e  $P_m$  o ponto médio.

**Exemplo 2.1.5.** *Considerando a congruência  $\{X(u, \theta), r(u, \theta)\}$  dada no exemplo (2.1.1), encontraremos os pontos focais para uma reta qualquer, o conjunto focal e a superfície do meio. Conforme feito no exemplo (2.1.1), temos:*

$$X(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (-R \cos \theta, -R \sin \theta, u)$$

$$r(u, \theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 0),$$

logo,

- $X_u(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{(R^2 + u^2)^3}} (Ru \cos \theta, Ru \sin \theta, R^2)$
- $X_\theta(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (R \sin \theta, -R \cos \theta, 0)$
- $r_u(u, \theta) = (0, 0, 0)$
- $r_\theta(u, \theta) = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0).$

Além disso,

- $e = \frac{R^2}{(R^2 + u^2)^2}$
- $f = 0$
- $g = \frac{R^2}{R^2 + u^2}$
- $a = 0$
- $b = b' = 0$
- $c = -\frac{R^2}{\sqrt{R^2 + u^2}}.$

Assim, segue de (2.22) que:

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = -\frac{ec}{eg} = \sqrt{R^2 + u^2} \\ \rho_1 \rho_2 = 0. \end{cases}$$

Portanto,  $\rho_1 = 0$  e  $\rho_2 = \sqrt{R^2 + u^2}$ , ou seja, os pontos focais de uma reta qualquer coincidem com os seus pontos limites (calculados no exemplo (2.1.4)), conforme era esperado, uma vez que  $b = b' = 0$ . Os pontos no conjunto focal são da forma  $F_1(u, \theta) =$

$r(u, \theta) + 0X(u, \theta)$  ou  $F_2(u, \theta) = r(u, \theta) + \sqrt{R^2 + u^2}X(u, \theta) = (0, 0, u)$ . Ou seja, o conjunto focal é a união de duas curvas, o círculo de centro na origem e raio  $R$  e o eixo  $Oz$ .

Sabendo que  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\sqrt{R^2 + u^2}}{2}$ , segue que a Superfície do meio da congruência é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) + \frac{\sqrt{R^2 + u^2}}{2} \frac{1}{\sqrt{R^2 + u^2}} (-R \cos \theta, -R \sin \theta, u) \\ &= \left( \frac{R}{2} \cos \theta, \frac{R}{2} \sin \theta, \frac{u}{2} \right),\end{aligned}$$

ou seja, é um cilindro. Na figura (2.9) estão representados a superfície do meio da congruência, bem como a reta da congruência determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e o seu ponto médio.

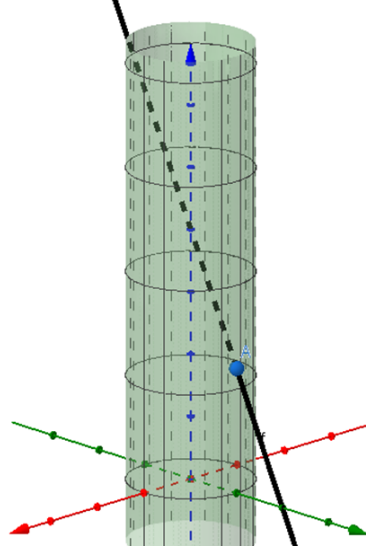


Figura 2.9: Superfície do meio da congruência.

■

**Proposição 2.1.6.** *Se um plano bissecta o ângulo entre os planos focais, então ele também bissecta o ângulo entre os planos principais.*

*Demonstração.* Na fórmula de Hamilton (2.1.3), nós vimos que se o plano central  $P$  (plano tangente no ponto central) é inclinado em relação a um dos planos principais num ângulo  $\theta$ , então:

$$k = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Conforme  $k$  varia de  $k_1$  à  $k_2$ ,  $\theta$  varia de 0 a  $\frac{\pi}{2}$ , com os planos principais sendo perpendiculares, já que os vetores normais a tais planos são paralelos aos tangentes à

representação esférica  $X(u(s), v(s))$  e pela proposição (2.1.1), tais vetores são perpendiculares. Quando o ponto central da reta é um dos focos, o plano  $P$  é um plano focal.

Nos focos,  $k$  tem valores  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Sejam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os valores correspondentes de  $\theta$ , então:

$$\begin{cases} \rho_1 = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \operatorname{sen}^2 \theta_1 \\ \rho_2 = k_1 \cos^2 \theta_2 + k_2 \operatorname{sen}^2 \theta_2 \end{cases}.$$

Somando as duas expressões acima, obtemos:

$$\rho_1 + \rho_2 = k_1 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) + k_2 (\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \operatorname{sen}^2 \theta_2),$$

mas como  $\rho_1 + \rho_2 = k_1 + k_2$ , temos:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= k_1 (\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) + k_2 (\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \operatorname{sen}^2 \theta_2) \\ &\Rightarrow k_1 (1 - \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2) + k_2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_1 - \operatorname{sen}^2 \theta_2) = 0 \\ &\Rightarrow k_1 (\operatorname{sen}^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2) + k_2 (-\operatorname{sen}^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) = 0 \\ &\Rightarrow (k_1 - k_2) (\operatorname{sen}^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2) = 0. \end{aligned}$$

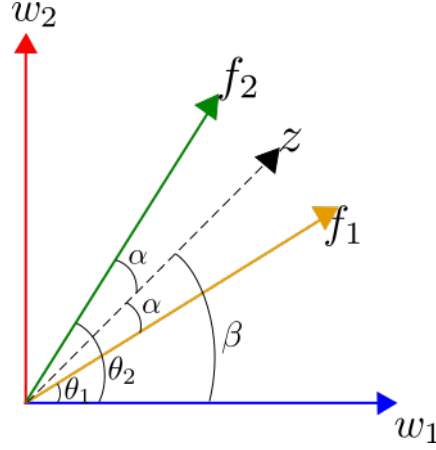
Como estamos considerando casos em que  $k_1 \neq k_2$ , segue que  $\operatorname{sen}^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2 = 0$ , portanto, sabendo que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são ângulos entre 0 e  $\pi/2$ , temos  $\operatorname{sen} \theta_1 = \cos \theta_2$ , e claro,  $\operatorname{sen} \theta_2 = \cos \theta_1$ . Além disso, concluímos que:

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (2.24)$$

Assim, sabendo que os planos principais são perpendiculares, temos que os planos focais estão simetricamente postos em relação a eles, no seguinte sentido: se um plano bissecta o ângulo entre os planos focais, ele também bissecta o ângulo entre os planos principais. Seja  $z$  o vetor normal ao plano que bissecta o ângulo entre os planos focais. Dessa forma,  $z$  bissecta o ângulo entre os vetores normais aos planos focais, que chamaremos  $f_1$  e  $f_2$ . Considere  $\alpha$  o ângulo entre  $z$  e  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sejam também  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos que  $f_1$  e  $f_2$  formam, respectivamente, com o vetor  $w_1$ , que é normal a um dos planos principais e  $\beta$  o ângulo entre  $z$  e  $w_1$ , assim:

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \theta_2 - \theta_1 \\ \beta &= \theta_1 + \alpha = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

■

Figura 2.10:  $z$  bissetando o ângulo entre os planos focais.

**Observação 2.1.5.** O ângulo  $\phi$  entre os planos focais é dado por

$$\begin{aligned}\phi = \theta_2 - \theta_1 &= \frac{\pi}{2} - 2\theta_1 \Rightarrow \text{sen}\phi = \cos(2\theta_1) \\ &= \cos^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_1.\end{aligned}$$

Como  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , segue que  $\text{sen}\theta_1 = \cos\theta_2$ , logo,

$$\begin{aligned}\phi &= \cos^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_1 \\ &= \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2.\end{aligned}$$

Ainda pelo fato de  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned}\rho_1 - \rho_2 &= k_1 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2) + k_2 (\text{sen}^2 \theta_1 - \text{sen}^2 \theta_2) \\ &= k_1 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2) + k_2 (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1) \\ &= (k_1 - k_2) (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2),\end{aligned}$$

o que nos diz que:

$$\text{sen}\phi = \frac{\rho_1 - \rho_2}{k_1 - k_2}. \quad (2.25)$$

### 2.1.4 Parâmetro de Distribuição

Consideremos uma congruência de retas, uma curva  $C$  na superfície de referência e a superfície de congruência associada. Sendo  $\{r(u(s), v(s)), X(u(s), v(s))\}$  a família a 1-parâmetro de retas que gera a superfície de congruência, segue que se  $D = [r', X', X]$ ,

onde ' indica a derivada em relação a  $s$ , então o parâmetro de distribuição é dado por:

$$\beta = \frac{D}{|X'|^2}, \quad (2.26)$$

além disso, note que

$$\begin{aligned} D &= [r', X', X] \\ &= [r_u u' + r_v v', X_u u' + X_v v', X]. \end{aligned}$$

Vamos expandir o produto acima para obter o termo que acompanha  $u'^2$ , para tanto, basta calcularmos

$$\begin{aligned} [r_u, X_u, X] &= \langle r_u, X_u \times X \rangle \\ &= \langle r_u, X_u \times \frac{(X_u \times X_v)}{eg - f^2} \rangle. \end{aligned}$$

Sendo  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , temos que

$$\begin{aligned} X_u \times (X_u \times X_v) &= (x_u y_u y_v - y_u^2 x_v - z_u^2 x_v + x_u z_u z_v) \vec{i} + (y_u z_u z_v - z_u^2 y_v - x_u^2 y_v + x_u x_v y_u) \vec{j} \\ &\quad + (z_u x_v x_u - x_u^2 z_v - y_u^2 z_v + y_u y_v z_u) \vec{k}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $x_u^2 x_v$  na primeira coordenada,  $y_u^2 y_v$  na segunda e  $z_u^2 z_v$  na terceira, temos

$$X_u \times (X_u \times X_v) = (x_u f - x_v e, y_u f - y_v e, z_u f - z_v e) = f X_u - e X_v.$$

Assim, o termo que acompanha  $u'^2$  é  $[r_u, X_u, X] = \frac{1}{h} \langle r_u, f X_u - e X_v \rangle = \frac{1}{h} (af - eb')$ , onde  $h^2 = eg - f^2$ .

Analogamente, o termo que acompanha  $u'v'$  é dado por

$$\begin{aligned} [r_u, X_v, X] + [r_v, X_u, X] &= \langle r_u, X_v \times X \rangle + \langle r_v, X_u \times X \rangle \\ &= \frac{1}{h} (ag - fb' + fb - ec), \end{aligned}$$

enquanto que o termo que acompanha  $v'^2$  é dado por

$$\begin{aligned} [r_v, X_v, X] &= \langle r_v, X_v \times X \rangle \\ &= \frac{1}{h} (bg - ef). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[r', X', X] = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} au' + bv' & b'u' + cv' \\ eu' + fv' & fu' + gv' \end{vmatrix}$$

e temos

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} au' + bv' & b'u' + cv' \\ eu' + fv' & fu' + gv' \end{vmatrix}}{h(eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2)}, \quad (2.27)$$

onde  $|X'|^2 = \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle = eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2$ .

Note que, conforme o feito em (2.19), nas superfícies desenvolvíveis da congruência temos  $\beta = 0$ , o que está em concordância com o visto na teoria de superfícies regradas.

### 2.1.5 Superfícies Regradas Médias

Considere uma congruência de retas  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ . O parâmetro de distribuição  $\beta$ , dado em (2.26), é uma função de  $\frac{u'}{v'}$ , assim, para qualquer reta da congruência o valor do parâmetro de distribuição é diferente para diferentes superfícies regradas através dessa reta.

**Definição 2.1.6.** *Dada uma reta numa congruência, as superfícies de congruência através dessa reta para as quais o parâmetro de distribuição tem o maior valor e o menor valor são chamadas **Superfícies médias** de congruência através dessa reta.*

A equação diferencial das superfícies médias é obtida igualando-se a zero a derivada de  $\beta$  em relação a  $\frac{u'}{v'}$ . A fim de simplificar a análise, faremos uma escolha adequada dos parâmetros e da superfície de referência. Tome a superfície do meio da congruência como sendo a superfície de referência, assim, por (2.22), temos:

$$f(b + b') - ag - ce = 0. \quad (2.28)$$

Considerando ainda a escolha dos parâmetros de modo que  $f = b + b' = 0$ , temos da equação acima que:

$$ag + ce = 0. \quad (2.29)$$



Assim, o parâmetro de distribuição  $\beta$  é dado por:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{beu'^2 + 2agu'v' + bgv'^2}{\sqrt{eg}(eu'^2 + gv'^2)} \\ &= \frac{b(eu'^2 + gv'^2)}{\sqrt{eg}(eu'^2 + gv'^2)} + \frac{2a\sqrt{g}u'v'}{\sqrt{e}(eu'^2 + gv'^2)} \\ &= \frac{b}{\sqrt{eg}} + 2a\sqrt{\frac{g}{e}} \left( \frac{u'v'}{eu'^2 + gv'^2} \right).\end{aligned}\quad (2.30)$$

Sendo  $\lambda = \frac{u'}{v'}$ , temos:

$$\beta = \frac{b}{\sqrt{eg}} + 2a\sqrt{\frac{g}{e}} \left( \frac{\lambda}{e\lambda^2 + g} \right).$$

Derivando a expressão acima em relação à  $\lambda$  e igualando a zero, temos:

$$\begin{aligned}2a\sqrt{\frac{g}{e}} \left[ \frac{e\lambda^2 + g - 2\lambda^2 e}{(e\lambda^2 + g)^2} \right] &= 0 \\ \Rightarrow g - e\lambda^2 &= 0 \\ \Rightarrow eu'^2 - gv'^2 &= 0.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Note que nas igualdades acima, não podemos ter  $g = 0$ , pois dessa forma,  $eg - f^2 = -f^2 > 0$ , absurdo. Usando (2.29), temos que  $-g = \frac{ce}{a}$ , logo, da equação (2.31) obtemos:

$$au'^2 + cv'^2 = 0. \quad (2.32)$$

Note que  $a \neq 0$ , pois se  $a = 0$ , teríamos de (2.29) que  $ce = 0$ , mas como  $e = |X_u| \neq 0$  (já que estamos supondo  $|X_u \times X_v| \neq 0$ ) teríamos  $c = 0$ , logo,  $II^p(v) \equiv 0$ , que é um caso que não nos interessa no momento. Chamamos a equação (2.32) de **Equação diferencial das superfícies médias**. Existem, portanto, duas superfícies médias através de cada reta da congruência.

**Proposição 2.1.7.** *Considerando a representação esférica, as curvas que satisfazem a equação (2.31) são curvas que bissektam o ângulo entre as curvas coordenadas, que nas condições dadas, são as representações esféricas das superfícies principais.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva satisfazendo (2.31), ou seja,  $\alpha$  é a representação esférica de uma superfície média. Sabemos que  $\frac{X_u}{\sqrt{e}}$  e  $\frac{X_v}{\sqrt{g}}$  são os vetores unitários tangentes às curvas coordenadas, logo, sendo  $\theta_1$  o ângulo entre  $\frac{X_u}{\sqrt{e}}$  e  $\alpha'(s)$ , e  $\theta_2$

o ângulo entre  $\frac{X_v}{\sqrt{g}}$  e  $\alpha'(s)$ , temos:

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{\langle \alpha', X_u \rangle}{|\alpha'| \sqrt{e}} \\ &= \frac{\langle u' X_u + v' X_v, X_u \rangle}{|\alpha'| \sqrt{e}}, \text{ como } f = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ &= \frac{\sqrt{e} u'}{|\alpha'| \sqrt{e}} \\ &= \frac{\sqrt{e} u'}{|\alpha'|}.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos:

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{g} v'}{|\alpha'|}.$$

Por (2.31), temos que  $\sqrt{e} u' = \sqrt{g} v'$ , logo,  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$  e como estamos considerando ângulos entre 0 e  $\frac{\pi}{2}$ , temos que  $\theta_1 = \theta_2$ . Portanto, o vetor tangente à curva  $\alpha(s)$  que satisfaz a equação (2.31) bissecta o ângulo entre os vetores tangentes às representações esféricas às superfícies principais. ■

**Observação 2.1.6.** *Sabemos que o vetor normal à superfície de congruência é paralelo ao vetor tangente a sua representação esférica, assim, segue da proposição anterior que os planos centrais das superfícies médias bissectam os ângulos entre os planos principais e portanto, os ângulos entre os planos focais, conforme visto na seção (2.1.3).*

**Observação 2.1.7.** *Dada uma reta de uma congruência e uma superfície média através dela, segue que o seu ponto central relativo a essa superfície tem coordenada*

$$k = -\frac{au'^2 + cv'^2}{eu'^2 + gv'^2},$$

desde que estamos considerando  $f = b + b' = 0$ . Assim, por (2.32), segue que  $k = 0$ , ou seja, o ponto central da reta relativo à qualquer das superfícies médias através dele está na superfície de referência, que no caso é a superfície do meio, portanto, o ponto central coincide com o ponto médio da reta.

As observações acima justificam a aplicação do termo "Média" a tais superfícies.

Os valores extremos do parâmetro de distribuição (correspondentes às superfícies médias) são obtidos substituindo em (2.30) os valores de  $\frac{u'}{v'}$  obtidos em (2.31), nos parâmetros correspondentes à reta que estamos considerando. Por (2.31), temos  $\frac{u'}{v'} = \pm \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{e}}$ ,

logo, por (2.30), obtemos como valores extremos:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{\sqrt{eg}} + \frac{a}{e} \\ \beta_2 = \frac{b}{\sqrt{eg}} - \frac{a}{e} \end{cases}. \quad (2.33)$$

Já os valores de  $\beta$  para as superfícies principais, considerando que  $f = b + b' = 0$ , são encontrados fazendo  $u' = 0$  e  $v' = 0$ . Os dois valores obtidos são iguais a:

$$\bar{\beta} = \frac{b}{\sqrt{eg}} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$$

Por essa razão, o parâmetro de distribuição para a superfície principal é chamado de **Parâmetro médio** da reta considerada.

**Proposição 2.1.8.** *Considere uma reta de uma congruência e  $P$  o plano central associado a uma superfície de congruência qualquer através dessa reta. Seja  $\phi$  a inclinação de  $P$  em relação ao plano central da superfície média que possui parâmetro de distribuição  $\beta_1 = \frac{b}{\sqrt{eg}} + \frac{a}{e}$  e satisfaz  $\sqrt{e}u' = \sqrt{g}v'$ . Então*

$$\beta = \beta_1 \cos^2 \phi + \beta_2 \sin^2 \phi,$$

onde  $\beta$  é o parâmetro de distribuição relativo à superfície de congruência com plano central  $P$ .

*Demonstração.* Seja  $R$  a superfície de congruência cujo plano central é  $P$ . Assim, como feito na demonstração da *fórmula de Hamilton*, o vetor unitário que é simultaneamente perpendicular a dois geradores consecutivos e não coplanares de  $R$  é dado por:

$$w = \frac{1}{\sqrt{egd\sigma}}(gXuv' - eX_vu').$$

Para a superfície média, temos que  $\sqrt{e}u' = \sqrt{g}v'$  e  $f = 0$ , logo, a expressão do vetor perpendicular comum é:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{egd\sigma}}(\sqrt{g}X_u\sqrt{g}v' - \sqrt{e}X_v\sqrt{e}u') \\ &= \frac{1}{\sqrt{eg}\sqrt{eu'^2 + gv'^2}}(\sqrt{g}X_u\sqrt{e}u' - \sqrt{e}X_v\sqrt{e}u') \\ &= \frac{\sqrt{e}u'}{\sqrt{eg}\sqrt{2eu'}}(\sqrt{g}X_u - \sqrt{e}X_v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2eg}}(\sqrt{g}X_u - \sqrt{e}X_v) \end{aligned}$$

Consequentemente, o ângulo  $\phi$  entre o plano central  $P$  e o plano central da superfície média é tal que:

$$\begin{aligned}
 \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}egd\sigma} \langle gX_u v' - eX_v u', (\sqrt{g}X_u - \sqrt{e}X_v) \rangle, \text{ como } f = \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}egd\sigma} (g\sqrt{g}ev' + e\sqrt{e}gu'), \text{ como } \sqrt{g}v' = \sqrt{e}u', \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}egd\sigma} (ge\sqrt{e}u' + eg\sqrt{e}u') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}d\sigma} (\sqrt{e}u' + \sqrt{e}u') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{eu'^2 + gv'^2}} (\sqrt{e}u' + \sqrt{g}v').
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \phi &= \frac{1}{2(eu'^2 + gv'^2)} (eu'^2 + gv'^2 + 2\sqrt{eg}u'v') \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{eg}u'v'}{eu'^2 + gv'^2}.
 \end{aligned}$$

Assim, temos ainda

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{eg}u'v'}{eu'^2 + gv'^2}.$$

Por (2.33):

$$\begin{aligned}
 \beta_1 \cos^2 \phi + \beta_2 \sin^2 \phi &= \left( \frac{b}{\sqrt{eg}} + \frac{a}{e} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{eg}u'v'}{eu'^2 + gv'^2} \right) + \left( \frac{b}{\sqrt{eg}} - \frac{a}{e} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{eg}u'v'}{eu'^2 + gv'^2} \right) \\
 &= \frac{b}{\sqrt{eg}} + \frac{2a}{e} \left( \frac{\sqrt{eg}u'v'}{eu'^2 + gv'^2} \right) \\
 &= \frac{b}{\sqrt{eg}} + 2a\sqrt{\frac{g}{e}} \left( \frac{u'v'}{eu'^2 + gv'^2} \right) \\
 &= \beta.
 \end{aligned}$$

■

**Observação 2.1.8.** Se  $\beta_1$  e  $\beta_2$  tem o mesmo sinal, segue da fórmula obtida na proposição anterior que  $\beta$  tem o mesmo sinal para todas as superfícies médias através da reta considerada. Tais retas são ditas **Elípticas**. Se, no entanto,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  tem sinais opostos,  $\beta$  é positivo para algumas superfícies e negativo para outras. Tais retas são ditas **Hiperbólicas**. Se  $\beta_1 = 0$  ou  $\beta_2 = 0$ , a reta é dita **Parabólica**.

Para as superfícies desenvolvíveis da congruência, temos que  $\beta = 0$ , consequentemente, a inclinação dos planos focais (que são os planos centrais das superfícies regradas

desenvolvíveis) em relação ao plano central da superfície média correspondente a  $\beta_1$  é tal que:

$$\tan \phi = \pm \sqrt{\frac{-\beta_1}{\beta_2}}, \quad (2.34)$$

pois  $\beta = 0$  implica que  $\beta_1 \cos^2 \phi + \beta_2 \sin^2 \phi = 0$ .

Como já vimos na observação (2.1.6), os planos centrais para as superfícies médias bissectam os ângulos entre os planos focais. Se  $\beta_1 = 0$ , a reta é parabólica e o plano focal coincide com o plano central para esta superfície média (pois  $\tan \phi = 0$ ). Assim, como tal plano central deve bissectar os planos focais, segue que os planos focais coincidem, e claro, os pontos focais coincidem, logo, sabendo que a reta considerada possui um único ponto focal, segue que as superfícies desenvolvíveis através dessa reta coincidem. Quando essa propriedade vale para todas as retas da congruência, ela é dita uma **Congruência Parabólica**.

**Exemplo 2.1.6.** Neste exemplo, considerando a congruência dada no exemplo (2.1.1), para o caso em que o raio do círculo é  $R = 1$  e tomando a reta da congruência que é determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , encontraremos as superfícies médias através dessa reta, os valores extremos do parâmetro de distribuição e classificaremos a reta. Conforme visto no exemplo (2.1.5), a superfície do meio é

$$\mathcal{M} = \left( \frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, \frac{u}{2} \right).$$

Assim, considerando a superfície do meio como superfície de referência e considerando o feito no exemplo (2.1.1), temos que a congruência é caracterizada por  $\{X(u, \theta), r(u, \theta)\}$ , onde

$$\begin{aligned} X(u, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} (-\cos \theta, -\sin \theta, u) \\ r(u, \theta) &= \left( \frac{1}{2} \cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, \frac{u}{2} \right). \end{aligned}$$

Assim,

- $X_u(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)^3}} (u \cos \theta, u \sin \theta, 1)$
- $X_\theta(u, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} (\sin \theta, -\cos \theta, 0)$
- $r_u = (0, 0, \frac{1}{2})$
- $r_\theta = \left( -\frac{\sin \theta}{2}, \frac{\cos \theta}{2}, 0 \right).$

Logo,

$$\begin{aligned} \bullet \quad e &= \langle X_u, X_u \rangle = \frac{1}{(1+u^2)^2}, \quad f = \langle X_u, X_\theta \rangle = 0 \quad e \quad g = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = \frac{1}{1+u^2}. \\ \bullet \quad a &= \langle X_u, r_u \rangle = \frac{1}{2\sqrt{(1+u^2)^3}}, \quad b = b' = 0 \quad e \quad c = \langle r_\theta, X_\theta \rangle = \frac{-1}{2\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

Note que, conforme esperado, temos  $f(b+b') - ag - ec = 0$ . Como  $f = b + b' = 0$ , a equação das superfícies médias é  $au'(s)^2 + c\theta'(s)^2 = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{(1+u^2)^3}}u'(s)^2 - \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\theta'(s)^2 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{u'(s)}{\theta'(s)} &= \pm\sqrt{1+u^2} \\ \Rightarrow \theta'(s) &= \pm u'(s) \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \text{Caso 1.} \quad \theta'(s) = u'(s) \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Resolvendo a E.D.O. acima, temos

$$\theta(s) = s + c_1$$

$$u(s) = \sinh(s + c_2),$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes. Como iremos considerar a reta determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , tomemos na E.D.O. acima a condição inicial  $(u(0), \theta(0)) = (2, \frac{\pi}{2})$ . Logo, a solução é

$$\begin{aligned} u(s) &= \sinh(s + \operatorname{arcsinh}(2)) \\ \theta(s) &= s + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Assim,  $\alpha(s) = X\left(\sinh(s + \operatorname{arcsinh}(2)), s + \frac{\pi}{2}\right)$  é a representação esférica de uma das superfícies médias. A curva na superfície de referência que é cortada pelos geradores dessa superfície média é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= r(u(s), \theta(s)) \\ &= \left( \frac{\cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{2}, \frac{\operatorname{sen}\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{2}, \frac{\sinh(s + \operatorname{arcsinh}(2))}{2} \right). \end{aligned}$$

Assim, a superfície média é dada por:

$$Z(s, v) = \psi(s) + v\alpha(s). \quad (2.35)$$

Graficamente, temos:

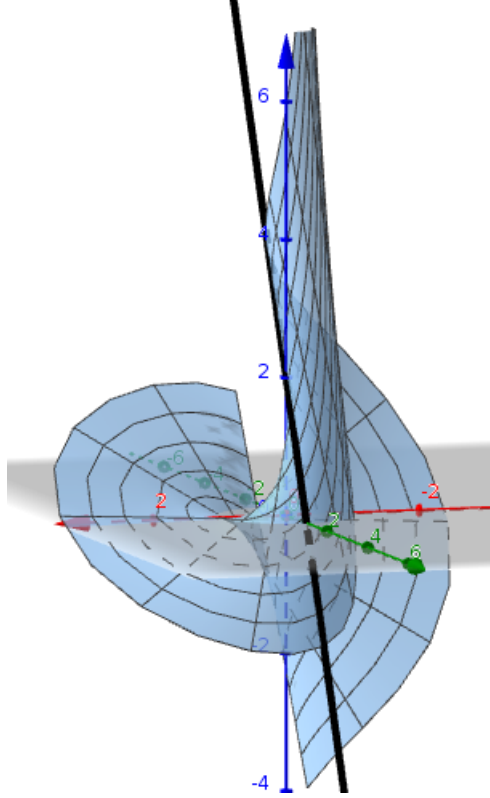


Figura 2.11: Superfície média e a reta determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Na figura (2.11) estão representados a superfície média e a reta determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , que está contida na superfície.

- *Caso 2.*  $\theta'(s) = -u'(s) \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ .

De modo análogo ao feito no caso anterior, obtemos como solução passando por  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  em  $s = 0$ , as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\bar{u}(s) &= \sinh(-s + \operatorname{arcsinh}(2)) \\ \bar{\theta}(s) &= s + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Assim, sendo  $\bar{\alpha}(s) = X(\bar{u}(s), \bar{\theta}(s))$  e

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(s) &= r(\bar{u}(s), \bar{\theta}(s)) \\ &= \left( \frac{\cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{2}, \frac{\operatorname{sen}\left(s + \frac{\pi}{2}\right)}{2}, \frac{\sinh(-s + \operatorname{arcsinh}(2))}{2} \right),\end{aligned}$$

a outra superfície média é dada por

$$\overline{Z}(s, v) = \overline{\psi}(s) + v\overline{\alpha}(s). \quad (2.36)$$

Graficamente, temos:

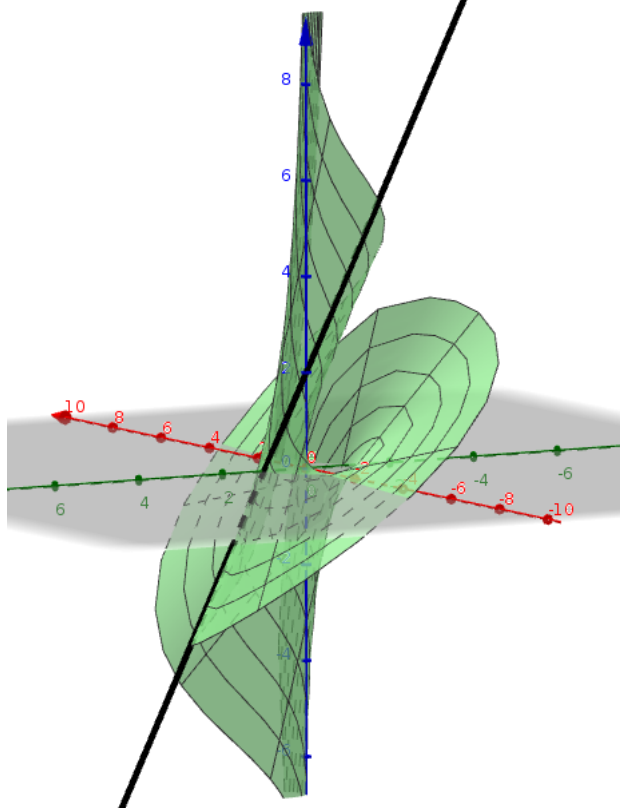


Figura 2.12: Superfície média e a reta determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Na figura (2.12) estão representados a segunda superfície média e a reta determinada pelos parâmetros  $u = 2$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , que está contida na superfície.

Já os valores extremos do parâmetro de distribuição, conforme visto em (2.33), são dados por:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{\sqrt{eg}} + \frac{a}{e} \\ \beta_2 = \frac{b}{\sqrt{eg}} - \frac{a}{e} \end{cases}. \quad (2.37)$$



Assim,

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{125}}{1}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \beta_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Portanto, a reta dada é um do tipo Hiperbólica.

■

**Proposição 2.1.9.** *A equação diferencial das superfícies médias para uma escolha qualquer de parâmetros é dada por:*

$$\frac{ag - (b + b')f + ce}{2(eg - f^2)} = \frac{au'^2 + (b + b')u'v' + cv'^2}{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2}. \quad (2.39)$$

*Demonstração.* Segue de (2.27) que o parâmetro de distribuição é dado por:

$$\beta = \frac{\lambda^2 (af - eb') + \lambda (ag + bf - ec - fb') + bg - cf}{\sqrt{eg - f^2} (e\lambda^2 + 2f\lambda + g)}, \quad (2.40)$$

onde  $\lambda = \frac{u'}{v'}$ . Derivando a expressão (2.40) em relação à  $\lambda$  e igualando a zero, obtemos:

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{2\lambda (af - b'e) + ag + bf - ce - b'f}{\sqrt{eg - f^2} (e\lambda^2 + 2f\lambda + g)} \\ &\quad - \frac{(\lambda^2 (af - b'e) + \lambda (ag + bf - ce - b'f) + bg - cf) (2e\lambda + 2f)}{\sqrt{eg - f^2} (e\lambda^2 + 2f\lambda + g)^2} = 0 \\ &\Rightarrow 2\lambda (af - b'e) + ag + bf - ce - b'f \\ &\quad - \frac{(\lambda^2 (af - b'e) + \lambda (ag + bf - ce - b'f) + bg - cf) (2e\lambda + 2f)}{(e\lambda^2 + 2f\lambda + g)} = 0. \end{aligned}$$

Sendo  $H = 2\lambda (af - b'e) + ag + bf - ce - b'f$  e  $G = (\lambda^2 (af - b'e) + \lambda (ag + bf - ce - b'f) + bg - cf) (2e\lambda + 2f)$ , segue da equação acima que:

$$(e\lambda^2 + 2f\lambda + g) \cdot H - G = 0, \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned} (e\lambda^2 + 2f\lambda + g) \cdot H &= (2af - 2b'e) e\lambda^3 + [(ag + bf - ce - b'f) e + 2(2af - 2b'e) f] \lambda^2 \\ &\quad + [2(ag + bf - ce - b'f) f + (2af - 2b'e) g] \lambda \\ &\quad + (ag + bf - ce - b'f) g \end{aligned}$$

e

$$G = 2 (af - b'e) e \lambda^3 + [2 (ag + bf - ce - b'f) e + 2 (af - b'e) f] \lambda^2 \\ + [2 (bg - cf) e + 2 (ag + bf - ce - b'f) f] \lambda + 2 (bg - cf) f.$$

Assim, a expressão (2.41) se reduz a:

$$\begin{aligned} & (-aeg + 2af^2 - bef + ce^2 - b'ef) \lambda^2 + (2afg - 2beg + 2cef - 2b'eg) \lambda \\ & + ag^2 - bfg - ceg + 2cf^2 - b'fg = 0 \\ \Rightarrow & eg (a\lambda^2 + 2(b + b')\lambda + c) - f^2 (2a\lambda^2 + 2c) = \\ & (bef + ce^2 - b'ef) \lambda^2 (2afg + 2cef) \lambda + ag^2 - bfg - b'fg. \end{aligned}$$

Somando em ambos os lados  $ega\lambda^2 + egc - 2f^2(b + b')\lambda$ , temos:

$$\begin{aligned} & eg (2a\lambda^2 + 2(b + b')\lambda + 2c) - f^2 (2a\lambda^2 + 2(b + b') + 2c) = \\ & (-bef + ce^2 - b'ef + ega) \lambda^2 \\ & + (2afg + 2cef - 2f^2(b + b')) \lambda \\ & + ag^2 - bfg - b'fg + egc. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & 2 (eg - f^2) [a\lambda^2 + (b + b')\lambda + c] = (e\lambda^2 + 2f\lambda + g) [ag - (b + b')f + ce] \\ \Rightarrow & \frac{au'^2 + (b + b')u'v' + cv'^2}{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2} = \frac{ag - (b + b')f + ce}{2(eg - f^2)}. \end{aligned}$$

■

### 2.1.6 Congruência Normal

Agora, trataremos de um tipo especial de congruência, dita Congruência normal. Além de defini-la formalmente, iremos, na proposição (2.1.11) e na observação (2.1.11), relacionar o seu estudo ao estudo das linhas de curvatura e das curvaturas principais, feito no capítulo 1.

**Definição 2.1.7.** *Uma congruência de retas  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ , com superfície de referência  $S$ , é dita uma congruência normal se existe uma superfície  $S'$  que intersecta as suas retas ortogonalmente. Os pontos de  $S'$  que são cortados pelas retas da congruência são dados por:*

$$R(u, v) = r(u, v) + t(u, v)X(u, v),$$

onde  $t$  é a coordenada do dito ponto em relação a  $X$ .

**Proposição 2.1.10.** *Considere  $\mathcal{C} = \{X(u, v), r(u, v)\}$ .  $\mathcal{C}$  é normal se, e somente se,  $b = b'$ , onde  $b$  e  $b'$  são coeficientes da segunda forma quadrática de Kummer.*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha  $\mathcal{C}$  uma congruência normal e seja  $S'$  a superfície que intersecta suas retas ortogonalmente. Tome  $C$  uma curva sobre  $S'$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , assim, os pontos de  $S'$  intersectados por  $\mathcal{C}$  e que estão sobre  $C$ , são tais que:

$$\bar{R}(s) = \bar{R}(u(s), v(s)) = r(u(s), v(s)) + t(u(s), v(s))X(u(s), v(s)). \quad (2.42)$$

Sendo  $\mathcal{C}$  normal, temos que  $\langle X, \bar{R}'(s) \rangle = 0$ , logo,

$$\langle X, r' + t'X + tX' \rangle = 0,$$

como  $X \perp X_u$ ,  $X \perp X_v$  e  $|X| = 1$ , temos da expressão anterior que:

$$-t' = \langle X, r' \rangle.$$

Sendo  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  e  $r(u, v) = (\mu(u, v), \lambda(u, v), \xi(u, v))$ , temos da equação acima que:

$$-t' = (x\mu_u + y\lambda_u + z\xi_u)u' + (x\mu_v + y\lambda_v + z\xi_v)v'.$$

Sendo  $P = x\mu_u + y\lambda_u + z\xi_u$  e  $Q = x\mu_v + y\lambda_v + z\xi_v$ , segue-se que:

$$-t' = Pu' + Qv'. \quad (2.43)$$

Note que  $P = \langle X, r_u \rangle$  e  $Q = \langle X, r_v \rangle$ . Sendo a congruência normal, temos ainda que  $\langle \bar{R}_u, X \rangle = \langle \bar{R}_v, X \rangle = 0$ .

- De  $\langle \bar{R}_u, X \rangle = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \langle r_u + t_u X + tX_u, X \rangle &= 0, \text{ como } \langle X, X_u \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle r_u + t_u X, X \rangle &= 0 \\ \Rightarrow x\mu_u + y\lambda_u + z\xi_u + t_u &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

- Analogamente, de  $\langle \bar{R}_v, X \rangle = 0$ , tem-se:

$$x\mu_v + t\lambda_v + z\xi_v + t_v = 0 \quad (2.45)$$

Derivando (2.44) em relação a  $v$ , (2.45) em relação a  $u$  e considerando que as derivadas parciais comutam (as funções são tomadas analíticas), segue que:

$$-t_{uv} = x_v \mu_u + x \mu_{uv} + y_v \lambda_u + y \lambda_{uv} + z_v \xi_u + z \xi_{uv} \quad (2.46)$$

$$-t_{uv} = x_u \mu_v + x \mu_{uv} + y_u \lambda_v + y \lambda_{uv} + z_u \xi_v + z \xi_{uv}. \quad (2.47)$$

Das expressões acima, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u} &\Leftrightarrow \langle X_v, r_u \rangle + \langle X, r_{uv} \rangle = \langle X_u, r_v \rangle + \langle X, r_{uv} \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle X_v, r_u \rangle = \langle X_u, r_v \rangle \\ &\Leftrightarrow b = b'. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Se  $b = b'$ , segue do visto acima que  $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}$ , onde  $P = \langle X, r_u \rangle$  e  $Q = \langle X, r_v \rangle$ . Defina:

$$t = A - \int Pu' + Qv',$$

onde  $A$  é uma constante. Como  $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}$ , segue que a integral anterior independe do caminho e  $t$  é bem definida. Note que considerando  $\bar{R}(u(s), v(s)) = r(u(s), v(s)) + t(u(s), v(s))X(u(s), v(s))$ , temos:

$$\begin{aligned} -t' &= Pu' + Qv' \\ &\Rightarrow -t' = \langle X, r' \rangle \\ &\Rightarrow -t' = \langle X, r' \rangle + t\langle X, X' \rangle, \text{ pois } \langle X, X' \rangle = 0, \text{ já que } |X| = 1 \\ &\Rightarrow \langle X, r' \rangle + t\langle X, X' \rangle + t'\langle X, X \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle X, r' + t'X + tX' \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \bar{R}', X \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a congruência é normal. ■

**Observação 2.1.9.** Quando a equação  $-t' = \langle X, r' \rangle = Pu' + Qv'$  satisfaz  $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}$ , diremos que ela é **exata**. Assim, segue da demonstração acima, que a equação  $-t' = \langle X, r' \rangle$  ser exata é uma condição necessária e suficiente para que a congruência seja normal, uma vez que mostramos que  $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u} \Leftrightarrow b = b'$ .

**Observação 2.1.10.** De  $b = b'$ , obtemos por (2.23) que:

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = k_1 + k_2 \\ \rho_1 - \rho_2 = k_1 - k_2 \end{cases},$$

logo,  $\rho_2 = k_1$  e  $\rho_2 = k_2$ , ou seja, os pontos focais das retas de uma congruência normal coincidem com os pontos limites. Dessa forma, os planos focais coincidem com os planos principais, portanto, são perpendiculares.

**Exemplo 2.1.7.** Um exemplo simples de congruência normal é a congruência formada pelas normais a uma superfície.

**Exemplo 2.1.8.** A congruência dada no exemplo (2.1.1) é uma congruência normal, pois como visto no exemplo (2.1.4),  $b = b' = 0$ .

A seguir, demonstraremos o Teorema de Malus-Dupin, que afirma que se temos um sistema de raios de luz que é submetido a uma refração (ou reflexão), tal sistema entra em contato com uma superfície de refração (ou reflexão) e os desvios dos raios de luz gera uma nova congruência, de modo que se a primeira congruência é normal, então essa nova congruência também o é.

**Teorema 2.1.1** (Teorema de Malus-Dupin). *Se um sistema de raios constituindo uma congruência normal é sujeito a um número qualquer de refrações e reflexões, então a congruência permanece normal.*

*Demonstração.* Antes, enunciaremos as Leis da refração e da reflexão:

#### 1ª Lei da refração da luz.

O raio incidente ( $r_1$ ), o raio refratado ( $r_2$ ) e o normal ( $N$ ) à superfície de incidência, no ponto de incidência, são coplanares.

#### 2ª Lei da refração da luz.

Seja  $\theta_1$  o ângulo de incidência e  $\theta_2$  o ângulo de refração, então  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ , onde  $n_1$  e  $n_2$  são constantes que indicam o índice de refração dos meios.

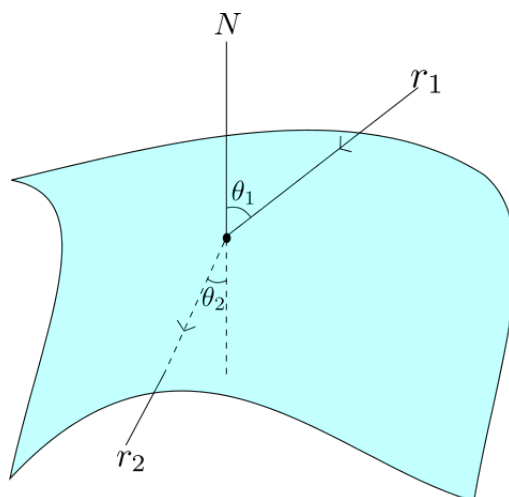


Figura 2.13: Refração de um raio

#### 1ª Lei da reflexão da luz

O raio de incidência ( $r_1$ ), o raio refletido ( $r_2$ ) e o normal ( $N$ ) à superfície de incidência, no ponto de incidência, são coplanares.

**2ª Lei da reflexão da luz**

O ângulo de incidência  $\theta_1$ , entre o raio de incidência e a normal, é igual ao ângulo de reflexão  $\theta_2$  entre o raio refletido e a reta normal.

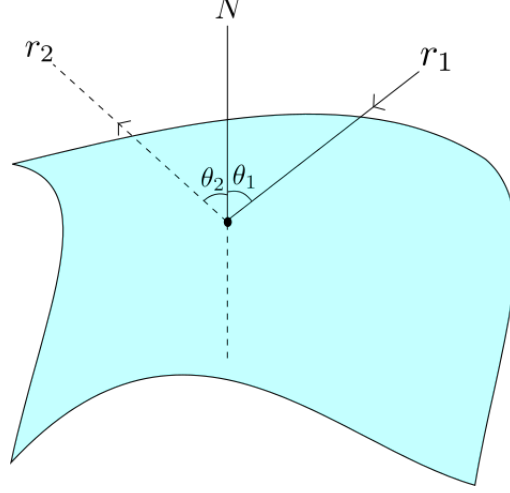


Figura 2.14: Reflexão de um raio

Considere a superfície de refração (ou reflexão) como sendo a superfície diretora  $S$ . Sejam  $r = (x, y, z) \in S$ ,  $v_1 = (X, Y, Z)$  o vetor diretor unitário do raio de incidência,  $v_2 = (X', Y', Z')$  o vetor diretor unitário do raio refratado (refletido) e  $N = (X'', Y'', Z'')$  o vetor normal unitário à  $S$  no ponto de incidência. Como o raio incidente, o raio refratado (refletido) e o normal são coplanares, segue que existem  $\lambda$  e  $\mu$ , tais que:

$$\begin{cases} X = \lambda X'' + \mu X' \\ Y = \lambda Y'' + \mu Y' \\ Z = \lambda Z'' + \mu Z' \end{cases},$$

assim,

$$\begin{cases} YZ'' - ZY'' = \mu(Y'Z'' - Z'Y'') \\ ZX'' - XZ'' = \mu(Z'X'' - X'Z'') \\ XY'' - YX'' = \mu(X''Y'' - Y'X'') \end{cases}, \quad (2.48)$$

No entanto, sabendo que  $\sin\theta_1 = |v_1 \times N|$  e que  $\sin\theta_2 = |v_2 \times N|$ , segue das expressões em (2.48) que  $\sin\theta_1 = \mu \sin\theta_2$ . Logo, pela segunda lei da refração (reflexão), temos que  $\mu$  é uma constante, que será o quociente dos índices de refração (ou  $-1$ , em caso de reflexão). Sabendo que  $N$  é o normal à superfície  $S$  em  $r(s) = r(u(s), v(s)) =$

$(x(u(s), v(s)), y(u(s), v(s)), z(u(s), v(s)))$ , segue que:

$$\begin{aligned}\langle N, r'(s) \rangle &= 0 \\ \Rightarrow X''x'(s) + Y''y'(s) + Z''z'(s) &= 0.\end{aligned}$$

Mas, sendo

$$\begin{aligned}Xx'(s) + Yy'(s) + Zz'(s) &= \lambda (X''x'(s) + Y''y'(s) + Z''z'(s)) \\ &+ \mu (X'x'(s) + Y'y'(s) + Z'z'(s)),\end{aligned}$$

temos:

$$Xx'(s) + Yy'(s) + Zz'(s) = \mu (X'x'(s) + Y'y'(s) + Z'z'(s)).$$

Desde que a congruência é normal, segue da observação (2.1.9) que  $-t' = Xx'(s) + Yy'(s) + Zz'(s)$  é exata e como  $\mu$  é constante, segue que o mesmo ocorre com  $-\bar{t}'(s) = (X'x'(s) + Y'y'(s) + Z'z'(s))$ . Portanto, a congruência permanece normal. ■

**Proposição 2.1.11.** *Consideremos  $S$  uma superfície regular parametrizada por  $r(u, v)$ , com  $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$  aberto e a congruência  $\{r(u, v), N(u, v)\}$  gerada pela família das normais a  $S$ . Sejam  $p = r(u_0, v_0)$ ,  $l$  a reta determinada pelos parâmetros  $q = (u_0, v_0)$  e  $k_{p1}, k_{p2} \neq 0$  as curvaturas principais de  $S$  em  $p$ . Então as curvas diretrizes (sobre  $S$ ) das superfícies desenvolvíveis através de  $l$ , coincidem com as linhas de curvatura de  $S$ , enquanto os pontos focais coincidem com os centros de curvatura principal.*

*Demonstração.* Ao olharmos para a definição das formas de Kummer, em (2.1.2) e compararmos com as formas fundamentais dadas no primeiro capítulo, verificamos que, para a congruência  $\{r(u, v), N(u, v)\}$ , a primeira forma de Kummer coincide com a terceira forma fundamental, enquanto que a segunda forma de Kummer coincide com a segunda

forma fundamental multiplicada por  $-1$ . Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}
a &= \langle r_u(q), N_u(q) \rangle = -L \\
b &= b' = \langle r_v(q), N_u(q) \rangle = -M \\
c &= \langle r_v(q), N_v(q) \rangle = -N \\
e &= \langle N_u(q), N_u(q) \rangle \\
&= \langle dN_p(1, 0), dN_p(1, 0) \rangle \\
&= III_p(1, 0) \\
&= 2H \cdot II_p(1, 0) - KI_p(1, 0) \\
&= 2HL - KE \\
g &= \langle N_v(q), N_v(q) \rangle \\
&= \langle dN_p(0, 1), dN_p(0, 1) \rangle \\
&= III_p(0, 1) \\
&= 2H \cdot II_p(0, 1) - KI_p(0, 1) \\
&= 2HJ - KG \\
f &= \langle N_u(q), N_v(q) \rangle \\
&= \langle dN_p(1, 0), dN_p(0, 1) \rangle \\
&= III_p((1, 0), (0, 1)) \\
&= 2H \cdot II_p((1, 0), (0, 1)) - KI_p((1, 0), (0, 1)) \\
&= 2H \langle r_u(q), -N_v(q) \rangle - K \langle r_u(q), r_v(q) \rangle \\
&= 2HM - KF,
\end{aligned}$$

onde  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental,  $L, M$  e  $J$  são os coeficientes da segunda forma fundamental,  $H = \frac{k_{p1} + k_{p2}}{2}$  e  $K = k_{p1}k_{p2}$ . Assim, quando escrevemos a equação das superfícies desenvolvíveis, a saber,

$$(af - eb')u'^2 + (ag + bf - ec - b'f)u'v' + (bg - cf)v'^2 = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&(-2HML + KFL + 2HLM - KEM)u'^2 + (-2HJL + KGL + 2HLJ - KEJ)u'v' \\
&+ (-2HJM + KGM + 2HMJ - KFJ)v'^2 = 0,
\end{aligned}$$

que se reduz a

$$K \left[ (FL - EM)u'^2 + (GL - EJ)u'v' + (GM - FJ)v'^2 \right] = 0,$$



mas sendo  $K = k_1 k_2 \neq 0$  por hipótese, temos que a equação das superfícies desenvolvíveis se reduz a

$$(FL - EM)u^2 + (GL - EJ)u'v' + (GM - FJ)v'^2 = 0,$$

que é justamente a equação das linhas de curvatura, dada em (1.9). Sendo  $\alpha : I \rightarrow S$  a curva diretriz sobre  $S$  de uma superfície desenvolvível através de  $l$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos, conforme a observação (1.2.1), que a coordenada do ponto focal de  $l$  em relação a esta superfície é dada por  $\rho = \frac{-\langle \alpha'(0), N'(0) \rangle}{|N'(0)|^2}$ , onde  $N(s) = N \circ \alpha(s)$ . Por outro lado, sabemos pela proposição (1.3.4) que sendo  $\alpha$  linha de curvatura, segue que  $\gamma(s)N'(s) = \alpha'(s)$ , onde  $-\gamma(s)$  é o raio de curvatura principal. Assim,  $\rho = \frac{-\langle \alpha'(0), N'(0) \rangle}{|N'(0)|^2} = -\gamma(0)$ , ou seja, o ponto focal é o centro de curvatura principal. ■

**Observação 2.1.11.** *Conforme visto em (2.1.10) quando uma congruência é normal, temos  $b = b'$ , assim, as equações das superfícies principais e das superfícies desenvolvíveis, dadas em (2.4) e (2.20), respectivamente, se reduzem a:*

$$(af - eb)u^2 + (ag - ce)u'v' + (bg - cf)v'^2 = 0,$$

portanto, segue da proposição anterior que as curvas diretrizes das superfícies principais coincidem com as linhas de curvatura da superfície diretora da congruência.

### 2.1.7 Congruência Isotrópica

**Definição 2.1.8.** *Dizemos que uma congruência  $\{X(u, v), r(u, v)\}$  é isotrópica quando os coeficientes das duas formas quadráticas de Kummer são proporcionais, ou seja, quando existe  $\lambda$ , tal que:*

$$a = \lambda e, \quad b + b' = \lambda 2f \quad e \quad c = \lambda g. \quad (2.49)$$

Quando (2.49) ocorre, segue de (2.1) que o ponto central de cada reta da congruência é o mesmo para todas as superfícies da congruência através da reta considerada, pois

$$k = \frac{\lambda eu'^2 + 2f\lambda u'v' + \lambda gv'^2}{eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2} = \lambda. \quad (2.50)$$

Assim, os dois limites coincidem um com o outro e portanto, com o ponto médio da reta. Sabendo que a linha de estrição para qualquer superfície de congruência é o local dos pontos centrais dos seus geradores, segue que no caso aqui estudado, a linha de estrição será o local dos pontos médios (que coincidem com os centrais). Dessa forma, as linhas

de estricção de todas as superfícies de congruência estão na superfície do meio.

Consideremos a superfície do meio como sendo a superfície diretora, assim, sabendo que os pontos centrais moram na superfície do meio, segue que  $k \equiv 0$ , portanto, a segunda forma de Kummer é nula, ou seja,

$$a = c = b + b' = 0. \quad (2.51)$$

$$\langle r', X' \rangle = 0. \quad (2.52)$$

**Definição 2.1.9.** *Dada uma congruência  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ , os pontos  $r(u_0, v_0)$  na superfície diretora da congruência, tais que, existe  $\lambda_0$  satisfazendo*

$$a(u_0, v_0) = \lambda_0 e(u_0, v_0), \quad (b + b')(u_0, v_0) = 2\lambda_0 f(u_0, v_0) \quad e \quad c(u_0, v_0) = \lambda_0 g(u_0, v_0),$$

*serão chamados de **singularidades umbílicas da congruência**. Essa nomenclatura se deve ao fato de que se considerarmos a congruência gerada pela família das normais à superfície  $S$ , parametrizada por  $r(u, v)$ , os pontos  $r(u_0, v_0)$  são os pontos umbílicos de  $S$ , o que decorre da observação (2.1.11).*

## Capítulo 3

# Equações Diferenciais Binárias e Campo de Lie-Cartan

### 3.1 Levantamento do Campo de Direções

Neste capítulo, iremos nos basear no artigo (3) e considerar equações diferenciais binárias (E.D.B.) da forma

$$a(u, v)dv^2 + 2b(u, v)dudv + c(u, v)du^2 = 0, \quad (3.1)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são funções suaves, definidas num aberto  $U$  do  $\mathbb{R}^2$  e que se anulam em  $(0, 0)$ . Nos pontos  $(u, v)$  onde o discriminante  $\Delta = 4(b^2 - ac)$  é positivo, a equação (3.1) define um par de direções no plano. Uma forma de estudar essas equações é levantar o campo de direções bivaluado num único campo numa cobertura dupla associada. Considere (3.1) e o espaço  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1$ , onde  $\mathbb{R}P^1$  representa o espaço projetivo. Tomando em  $\mathbb{R}P^1$  a carta  $p = \frac{dv}{du}$ , consideremos o conjunto  $M = \{(u, v, p) : T(u, v, p) = 0\}$ , onde  $T(u, v, p) = a(u, v)p^2 + 2b(u, v)p + c(u, v)$ . Usando Taylor (Ver [14]) em torno de  $(0, 0)$ , temos

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a_1u + a_2v + O_a(2) \\ b(u, v) &= b_1u + b_2v + O_b(2) \\ c(u, v) &= c_1u + c_2v + O_c(2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $a_1 = \frac{\partial a}{\partial u}(0, 0)$ ,  $a_2 = \frac{\partial a}{\partial v}(0, 0)$  e  $O_a(2)$  representa os termos de ordem superior. Observações análogas são feitas para as expressões de  $b(u, v)$  e  $c(u, v)$ . Consideremos ainda o conjunto  $\delta = \{(u, v) : b(u, v)^2 - a(u, v)c(u, v) = 0\}$ . Além disso, com as expressões

dadas em (3.2), obtemos a Hessiana de  $\Delta$  em  $(0, 0)$

$$H_{\Delta}(0, 0) = 4 \begin{bmatrix} 2(b_1^2 - a_1c_1) & 2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1 \\ 2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1 & 2(b_2^2 - a_2c_2) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \det H_{\Delta}(0, 0) &= 4(b_1^2 - a_1c_1)(b_2^2 - a_2c_2) - (2b_1b_2 - a_1c_2 - a_2c_1)^2 \\ &= 4b_1^2b_2^2 - 4b_1^2a_2c_2 - 4b_2^2a_1c_1 + 4a_1a_2c_1c_2 \\ &\quad - 4b_1^2b_2^2 + 4b_1b_2a_1c_2 + 4b_1b_2a_2c_1 - (a_1c_2 + a_2c_1)^2. \end{aligned}$$

Como  $b_1b_2a_1c_2 = a_1b_2(b_1c_2 - b_2c_1) + b_2^2a_1c_1$  e  $b_1b_2a_2c_1 = -a_2b_1(b_1c_2 - b_2c_1) + b_1^2a_2c_2$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \det H_{\Delta}(0, 0) &= 4b_1^2b_2^2 - 4b_1^2a_2c_2 - 4b_2^2a_1c_1 + 4a_1a_2c_1c_2 - 4b_1^2b_2^2 \\ &\quad + 4a_1b_2(b_1c_2 - b_2c_1) + 4b_2^2a_1c_1 - 4a_2b_1(b_1c_2 - b_2c_1) + 4b_1^2a_2c_2 - (a_1c_2 + a_2c_1)^2 \\ &= 4(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) + 4a_1a_2c_1c_2 - a_1^2c_2^2 - 2a_1a_2c_1c_2 - a_2^2c_1^2 \\ &= 4(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) - (a_1c_2 - a_2c_1)^2. \end{aligned}$$

**Proposição 3.1.1.** (1)  $M = T^{-1}(0)$  é uma superfície regular numa vizinhança de  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1 \Leftrightarrow b^2 - ac$  tem em  $(0, 0)$  um ponto crítico não degenerado.

(2) A projeção natural  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\pi(u, v, p) = (u, v)$ , é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\delta)$ , onde  $\delta = \{(u, v) : b(u, v)^2 - a(u, v)c(u, v) = 0\}$ .

*Demonstração.* (1) Inicialmente, note que  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $\Delta$ , pois  $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$ , o que nos diz que  $\Delta_u(0, 0) = \Delta_v(0, 0) = 0$ .

**Afirmção:**  $(0, 0)$  é um ponto crítico degenerado de  $\Delta$  se, e somente se,  $(0, 0, p)$  é um ponto crítico de  $T(u, v, p)$ .

De fato, se  $(0, 0, p)$  é um ponto crítico de  $T(u, v, p)$ , temos que  $T_p(0, 0, p) = 0$  (o que sempre ocorre em  $(0, 0, p)$ ), e além disso,  $T_v(0, 0, p) = T_u(0, 0, p) = 0$ . Assim,  $(0, 0, p)$  é um ponto crítico de  $T(u, v, p)$  se, e somente se

$$(a) \quad f(p) = T_u(0, 0, p) = a_1p^2 + 2b_1p + c_1 = 0$$

$$(b) \quad g(p) = T_v(0, 0, p) = a_2p^2 + 2b_2p + c_2 = 0.$$

No entanto, as duas igualdades acima valem, se e somente se,  $f$  e  $g$  possuem raízes em comum, o que ocorre se, e somente se, o Resultante de  $f$  e  $g$  (Ver [15]) é nulo, ou

seja,

$$\begin{aligned}
 R(f, g, p) &= \det \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 2b_1 & a_1 & 2b_2 & a_2 \\ c_1 & 2b_1 & c_2 & 2b_2 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \\
 &= (a_2c_1 - a_1c_2)^2 - 4(a_2b_1 - a_1b_2)(b_1c_2 - b_2c_1) = -\frac{1}{16} \det H_\Delta(0, 0) = 0.
 \end{aligned}$$

Assim,  $(0, 0, p)$  é ponto crítico de  $T$  se, e somente se,  $(0, 0)$  é ponto crítico degenerado de  $\Delta$ . Dessa forma,  $(0, 0)$  é uma singularidade de Morse (ponto crítico não degenerado) se, e somente se,  $(0, 0, p)$  não é ponto crítico de  $T$ , o que nos diz que 0 é valor regular de  $T$  numa vizinhança de  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ , portanto,  $M$  é superfície regular numa vizinhança de  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$ .

- (2) Sendo  $T(u, v, p) = a(u, v)p^2 + 2b(u, v)p + c(u, v)$ , temos  $T_p(u, v, p) = 2a(u, v)p + 2b(u, v)$ . Note que  $(u_0, v_0, p_0) \in M$  e  $T_p((u_0, v_0, p_0)) = 0$  se, e somente se,  $p_0$  satisfaz

$$\begin{aligned}
 \vartheta(p_0) &= a(u_0, v_0)p_0^2 + 2b(u_0, v_0)p_0 + c(u_0, v_0) = 0 \quad e \\
 \vartheta'(p_0) &= 2a(u_0, v_0)p_0 + 2b(u_0, v_0) = 0,
 \end{aligned}$$

o que ocorre se, e somente se,  $p_0$  é raiz dupla de  $\vartheta(p)$ . Sendo  $\vartheta(p)$  de segundo grau, isso ocorre se, e somente se,

$$b^2(u_0, v_0) - a(u_0, v_0)c(u_0, v_0) = 0.$$

Portanto,  $(u_0, v_0, p_0) \in M$  e  $T_p(u_0, v_0, p_0) = 0$  se, e somente se,  $(u_0, v_0, p_0) \in \pi^{-1}(\delta)$ , onde  $\delta = \{(u, v) : b^2(u, v) - a(u, v)c(u, v) = 0\}$ . Segue então que se  $(u_0, v_0, p_0) \in M$ , mas  $(u_0, v_0, p_0) \notin \pi^{-1}(\delta)$ , temos que  $T_p(u_0, v_0, p_0) \neq 0$  e  $T(u_0, v_0, p_0) = 0$ , portanto, segue do Teorema da Função Implícita que existem uma vizinhança  $V$  de  $(u_0, v_0)$  e  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, tais que:

- $T(u, v, \varphi(u, v)) = 0, \forall (u, v) \in V$ ;
- $(u, v, \varphi(u, v)) \in M, \forall (u, v) \in V$ ;
- $\varphi(u_0, v_0) = p_0$ .

Seja  $\psi(u, v) = (u, v, \varphi(u, v))$ , note que:

- $\psi$  é injetiva;
- $W = \psi(V) \subset M$ ;
- $\psi^{-1} = \pi|_W$  é contínua;

- $\{\psi_u, \psi_v\}$  é L.I.

Logo,  $\psi$  é uma parametrização local para  $M$  em torno de  $(u_0, v_0, p_0)$ , o que nos diz que  $\psi$  é um difeomorfismo local, logo,  $\pi$  é um difeomorfismo local fora de  $\pi^{-1}(\delta)$ . ■

**Proposição 3.1.2.** *O campo de vetores  $\xi = T_p \frac{\partial}{\partial u} + pT_p \frac{\partial}{\partial v} - (T_u + pT_v) \frac{\partial}{\partial p}$  é tal que  $d\pi_{(u,v,p)}(\xi)$  é um vetor com direção  $p$ , além disso,  $\xi$  é um campo tangente à superfície  $M$ . Neste caso, dizemos que  $\xi$  é um levantamento adequado da equação diferencial binária (3.1) e o chamamos de campo de Lie-Cartan associado a esta equação.*

*Demonstração.* Note que

$$d\pi_{(u,v,p)}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_p \\ pT_p \\ -(T_u + pT_v) \end{bmatrix} = T_p \frac{\partial}{\partial u} + pT_p \frac{\partial}{\partial v},$$

que é um vetor com direção dada por  $p$ . O fato de  $\xi$  ser tangente à  $M$ , segue do fato de  $T_u \cdot T_p + T_v \cdot pT_p - T_p \cdot (T_u + pT_v) = 0$ . ■

**Observação 3.1.1.** *Se tivéssemos usado a carta  $q = \frac{du}{dv}$ , obteríamos os mesmos resultados para o Campo de Lie-Cartan*

$$\eta = qH_q \frac{\partial}{\partial u} + H_q \frac{\partial}{\partial v} - (qH_u + H_v) \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.4)$$

onde  $H(u, v, q) = a(u, v) + 2b(u, v)q + c(u, v)q^2$ .

Seja  $(0, 0, p_0) \in M$ , com  $M$  regular. Assim, temos  $T_u(0, 0, p_0) \neq 0$  ou  $T_v(0, 0, p_0) \neq 0$ . Suponhamos  $T_v(0, 0, p_0) \neq 0$ , logo, pelo Teorema da Função Implícita, temos que numa vizinhança de  $(0, 0, p_0)$  podemos escrever  $v = v(u, p)$ . Sendo  $T(u, v(u, p), p) = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial u}(u, p) &= -\frac{T_u(u, v(u, p), p)}{T_v(u, v(u, p), p)} \\ \frac{\partial v}{\partial p}(u, p) &= -\frac{T_p(u, v(u, p), p)}{T_v(u, v(u, p), p)}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{cases} T_u + v_u T_v = 0 \\ T_p + v_p T_v = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

**Observação 3.1.2.** *As singularidades do Campo de Lie-Cartan  $\xi$ , que moram em  $\{0, 0\} \times$*

$\mathbb{RP}^1$ , são pontos da forma  $(0, 0, p)$ , onde

$$\phi(p) = T_u + pT_v = 0, \quad (3.6)$$

ou seja, , onde  $p$  é raiz de  $\phi$ . Usando as expressões dadas em (3.2), obtemos que  $\phi(p) = a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$ . De maneira análoga, se consideramos o campo de Lie-Cartan (3.4), as singularidades que moram em  $\{0, 0\} \times \mathbb{RP}^1$  são pontos da forma  $(0, 0, q)$ , tais que  $\varepsilon(q) = qH_u + H_v = 0$ .

**Observação 3.1.3.** Considerando que localmente podemos escrever  $v = v(u, p)$ , temos a superfície  $M$  escrita como gráfico e o campo  $\xi$  sobre este gráfico, já que é tangente à  $M$ . Considerando estes fatos, iremos projetar o campo  $\xi$  em  $up$ , nesta vizinhança e denotá-lo por  $\bar{\xi}$ . O campo  $\bar{\xi}$  é então localmente homomorfo a  $\xi$  e por isso, vamos estudar a singularidade  $(0, 0, p_0)$  de  $\xi$  através da singularidade  $(0, p_0)$  de  $\bar{\xi}$ .

**Proposição 3.1.3.** O campo de Lie-Cartan  $\xi$  tem genericamente uma ou três singularidades em  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{RP}^1$ . Além disso, se  $\phi(p) = a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$  não possui raízes duplas e também não possui raízes em comum com  $\gamma(p) = b_1 + (a_1 + b_2)p + a_2p^2$ , então as singularidades do campo  $\xi$  projetado em  $up$ , que denotaremos  $\bar{\xi}$ , são do tipo sela ou nó.

*Demonstração.* Desde que as singularidades do Campo de Lie-Cartan em  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{RP}^1$  são dadas pelos  $(0, 0, p)$ , tais que  $p$  é raiz de  $\phi(p) = a_2p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$ , segue que o Campo de Lie-Cartan tem uma ou três singularidades em  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{RP}^1$ . Seja  $p_0$  raiz de  $\phi$ , assim, o ponto  $(0, 0, p_0)$  é uma singularidade do campo de Lie-Cartan  $\xi$ , que é projetada em  $up$  no ponto  $(0, p_0)$ . Já o campo projetado  $\bar{\xi}$  é dado por:

$$\bar{\xi} = T_p \frac{\partial}{\partial u} - (T_u + pT_v) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Usando Taylor em torno de  $(0, p_0)$  e sabendo que  $v(0, p_0) = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
T_p(u, v(u, p), p) &= T_p(0, 0, p_0) + \frac{\partial T_p}{\partial u}(0, 0, p_0) + \frac{\partial T_p}{\partial p}(0, 0, p_0)(p - p_0) + h.o.t. \\
&= [T_{pu}(0, 0, p_0) + T_{pv}(0, 0, p_0)v_u(0, p_0)] u \\
&\quad + [T_{pp}(0, 0, p_0) + T_{pv}(0, 0, p_0)v_p(0, p_0)](p - p_0) + h.o.t. \\
(T_u + pT_v)(u, v(u, p), p) &= (T_u + pT_v)(0, 0, p_0) + \frac{\partial (T_u + pT_v)}{\partial u}(0, 0, p_0) \\
&\quad + \frac{\partial (T_u + pT_v)}{\partial p}(0, 0, p_0)(p - p_0) + h.o.t. \\
&= [T_{uu}(0, 0, p_0) + T_{uv}(0, 0, p_0)v_u(0, p_0)] u \\
&\quad + [p(T_{uv}(0, 0, p_0) + T_{vv}(0, 0, p_0)v_u(0, p_0))] u \\
&\quad + [T_{up}(0, 0, p_0) + T_{uv}(0, 0, p_0)v_p(0, p_0) + T_v(0, 0, p_0)](p - p_0) \\
&\quad + [p(T_{vp}(0, 0, p_0) + T_{vv}(0, 0, p_0)v_p(0, p_0))](p - p_0) + h.o.t.
\end{aligned}$$

Usando as expressões dadas em (3.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
T_{up}(0, 0, p_0) &= 2a_1p_0 + 2b_1 \\
T_{vp}(0, 0, p_0) &= 2a_2p_0 + 2b_2 \\
T_{pp}(0, 0, p_0) &= 0.
\end{aligned}$$

Usando (3.5) e o fato de  $\phi(p_0) = T_u(0, 0, p_0) + p_0T_v(0, 0, p_0) = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}
T_u(0, 0, p_0) + v_u(0, p_0)T_v(0, 0, p_0) &= 0 = \phi(p_0) = T_u(0, 0, p_0) + p_0T_v(0, 0, p_0) \\
T_p(0, 0, p_0) + v_p(0, p_0)T_v(0, 0, p_0) &= v_p(0, p_0)T_v(0, 0, p_0) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, como por hipótese  $T_v(0, 0, p_0) \neq 0$ , temos  $v_u(0, p_0) = p_0$  e  $v_p(0, p_0) = 0$ . Usando mais uma vez as expressões (3.5), obtemos:

$$\begin{aligned}
T_p &= [2a_1p_0 + 2b_1 + (2a_2p_0 + 2b_2)p_0] u + h.o.t. \\
&= 2[a_1p_0 + b_1 + a_2p_0^2 + b_2p_0] u + h.o.t. \\
&= 2[a_2p_0^2 + (a_1 + b_2)p_0 + b_1] u + h.o.t. \\
(T_u + pT_v) &= \kappa u - [2a_1p_0 + 2b_1 + a_2p_0^2 + c_2 + 2b_2p_0 + 2a_2p_0^2 + 2b_2p_0](p - p_0) + h.o.t. \\
&= \kappa u - [2b_1 + c_2 + 2(a_1 + 2b_2)p_0 + 3a_2p_0^2](p - p_0) + h.o.t.
\end{aligned}$$

o termo  $\kappa$  não será explicitado, pois não será útil nas contas a seguir. Considerando as



expressões acima, note que

$$\gamma_0 = 2 \left[ a_2 p_0^2 + (a_1 + b_2) p_0 + b_1 \right] = \frac{\gamma(p_0)}{2}$$

$$\phi'(p_0) = 2b_1 + c_2 + 2(a_1 + 2b_2) p_0 + 3a_2 p_0^2.$$

Assim, linearizando o campo  $\bar{\xi}$ , obtemos

$$D\bar{\xi}(0, p_0) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 \\ \kappa & -\phi'(p_0) \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são  $\lambda_1 = \gamma_0$  e  $\lambda_2 = -\phi'(p_0)$ . Por hipótese,  $\phi$  não possui raiz dupla e não possui raiz em comum com  $\gamma$ , segue que  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  e pelo Teorema de Hartman Grobman (Ver [19]), segue que as singularidades são do tipo Sela ou nó. ■

## 3.2 Comportamento Local das Curvas integrais

**Proposição 3.2.1.** *Suponha que  $\phi(p) = a_2 p^3 + (a_1 + 2b_2)p^2 + (2b_1 + c_2)p + c_1$  não possui raízes duplas e também não possui raízes em comum com  $\gamma(p) = b_1 + (a_1 + b_2)p + a_2 p^2$ , então a equação diferencial binária*

$$(a_1 u + a_2 v) dv^2 + 2(b_1 u + b_2 v) dudv + (c_1 u + c_2 v) du^2,$$

*que nada mais é que a equação (3.1) vista na sua parte linear, é topologicamente equivalente a uma das equações abaixo*

$$v dv^2 + 2(b_1 u + b_2 v) dudv \pm v du^2 = 0.$$

*Demonstração.* Consideremos a seguinte mudança de coordenadas linear

$$u = \alpha U + \beta V \tag{3.7}$$

$$v = \eta U + \nu V, \tag{3.8}$$

onde  $\alpha, \beta, \eta$  e  $\nu$  são constantes a serem determinadas. Usando a transformação acima, obtemos a seguinte equação diferencial binária

$$A dV^2 + 2B dU dV + C dU^2 = 0, \tag{3.9}$$

onde  $A = A_1U + A_2V$ ,  $B = B_1U + B_2V$ ,  $C = C_1U + C_2V$ , com

$$\begin{aligned} A_1 &= \nu^2 (\alpha a_1 + \eta a_2) + 2\nu\beta (\alpha b_1 + \eta b_2) + \beta^2 (\alpha c_1 + \eta c_2) \\ A_2 &= a_2\nu^3 + (2b_2 + a_1)\nu^2\beta + (2b_1 + c_2)\nu\beta^2 + c_1\beta^3 \\ B_1 &= \nu\eta (\alpha a_1 + \eta a_2) + (\alpha\nu + \eta\beta) (\alpha b_1 + \eta b_2) + \beta\alpha (\alpha c_1 + \eta c_2) \\ B_2 &= \nu\eta (\beta a_1 + \nu a_2) + (\alpha\nu + \eta\beta) (\beta b_1 + \nu b_2) + \beta\alpha (\beta c_1 + \nu c_2) \\ C_1 &= a_2\eta^3 + (2b_2 + a_1)\eta^2\alpha + (2b_1 + c_2)\eta\alpha^2 + c_1\alpha^3 \\ C_2 &= \eta^2 (\beta a_1 + \nu a_2) + 2\eta\alpha (\beta b_1 + \nu b_2) + \alpha^2 (\beta c_1 + \nu c_2) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que com escolhas adequadas para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  e  $\nu$ , temos  $A_1 = C_1 = 0$ ,  $A_2 = 1$  e  $C_2 = \pm 1$ . Note, nas expressões acima, que  $A_2 = \beta^3\phi\left(\frac{\nu}{\beta}\right)$  e que  $C_1 = \alpha^3\phi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)$ , onde  $\phi$  é a cúbica dada no enunciado da proposição, que possui ao menos uma raiz real. Seja  $p_0$  raiz de  $\phi$  e escolha  $\eta = \alpha p_0$ , logo,  $C_1 = 0$ . Note que não podemos escolher  $\nu = \beta p_0$  (o que nos garantiria  $A_2 = 0$ ), pois se  $\nu = \beta p_0$ , segue que a matriz da mudança de coordenadas (3.7) seria

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha p_0 & \beta p_0 \end{bmatrix},$$

que tem determinante nulo, o que indica que essa mudança de coordenadas não nos serve. Sendo  $\eta = \alpha p_0$ , expressões para  $A_1$  e  $C_2$  passam a ser

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha \left[ (a_2 p_0 + a_1) \nu^2 + 2(b_2 p_0 + b_1) \nu \beta + (c_2 p_0 + c_1) \beta^2 \right] \\ C_2 &= \alpha^2 \left[ (a_1 p_0^2 + 2b_1 p_0 + c_1) \beta + (a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2) \nu \right]. \end{aligned}$$

a) Não podemos tomar  $C_2 = 0$ .

De fato, como  $a_1 p_0^2 + 2b_1 p_0 + c_1 = T_u(0, 0, p_0)$  e  $a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2 = T_v(0, 0, p_0)$  não podem ser simultaneamente nulos, por hipótese de regularidade da superfície de Lie-Cartan  $M$ , podemos assumir que  $a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2 \neq 0$  e assim de  $\alpha^2 [T_u(0, 0, p_0)\beta + T_v(0, 0, p_0)\nu] = 0$ , obtemos

$$\nu = \frac{T_u(0, 0, p_0)}{T_v(0, 0, p_0)}\beta = \frac{a_1 p_0^2 + 2b_1 p_0 + c_1}{a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2}\beta.$$

No entanto, se isso ocorre, segue que a matriz da mudança de coordenadas (3.7) passa

a ser

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha p_0 & \frac{a_1 p_0^2 + 2b_1 p_0 + c_1}{a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2} \beta \end{bmatrix},$$

cujo determinante é

$$-\alpha\beta \frac{a_2 p_0^3 + 2b_2 p_0^2 + c_2 p_0 + a_1 p_0^2 + 2b_1 p_0 + c_1}{a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2} = -\alpha\beta \frac{\phi(p_0)}{a_2 p_0^2 + 2b_2 p_0 + c_2} = 0,$$

o que não pode ocorrer, pois desejamos uma mudança de coordenadas com determinante não nulo.

b) Podemos tomar  $A_1 = 0$ .

Note que

$$A_1 = \alpha\beta^2 \left[ (a_2 p_0 + a_1) \frac{\nu^2}{\beta^2} + 2(b_2 p_0 + b_1) \frac{\nu}{\beta} + (c_2 p_0 + c_1) \right] = \alpha\beta^2 \theta \left( \frac{\nu}{\beta} \right).$$

Assim, se  $\frac{\nu}{\beta} = p_0$ , encontramos

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha\beta^2 \theta(p_0) = \alpha\beta^2 (a_2 p_0^3 + 2b_2 p_0^2 + c_2 p_0 + a_1 p_0^2 + 2b_1 p_0 + c_1) \\ &= \alpha\beta^2 \phi(p_0) = 0. \end{aligned}$$

Logo, segue que  $\theta \left( \frac{\nu}{\beta} \right)$  possui duas raízes. Consideremos  $\frac{\nu}{\beta} = \lambda$  a outra raiz. Se essas duas raízes são iguais, ou seja, se  $\lambda = p_0$ , então  $p_0$  é raiz dupla de  $\theta$  e temos:

$$\begin{aligned} \theta \left( \frac{\nu}{\beta} \right) &= (a_1 + a_2 p_0) \left( \frac{\nu}{\beta} - p_0 \right)^2 \\ &= \left[ (a_2 p_0 + a_1) \frac{\nu^2}{\beta^2} + 2(b_2 p_0 + b_1) \frac{\nu}{\beta} + (c_2 p_0 + c_1) \right], \end{aligned}$$

considerando a igualdade de polinômios, obtemos  $p_0 = -\frac{b_2 p_0 + b_1}{a_2 p_0 + a_1}$ , ou equivalentemente,

$$a_2 p_0^2 + (b_2 + a_1) p_1 + b_1 = \frac{1}{2} \gamma(p_0) = 0,$$

o que é uma contradição, pois por hipótese, sendo  $p_0$  raiz de  $\phi$ , segue que  $p_0$  não é raiz de  $\gamma$ . Portanto,  $\lambda \neq p_0$  e podemos tomar  $\nu = \beta\lambda$ , o que garante  $A_1 = 0$ .

Os coeficientes  $A_2$  e  $C_2$  assumirão as seguintes formas

$$A_2 = \beta^3 \phi(\lambda)$$

$$C_2 = \frac{\alpha^2}{\beta} \left[ (a_1 + a_2 \lambda) p_0^2 + (2b_1 + 2b_2 \lambda) p_0 + (c_1 + c_2 \lambda) \right].$$

Tomemos  $\alpha$  e  $\beta$  de modo que  $A_2 = 1$  e  $C_2 = \pm 1$ . Assim, obtemos que numa vizinhança de  $(0, 0)$  a equação diferencial binária original é topologicamente equivalente a

$$VdV^2 + 2(B_1U + B_2V)dUdV \pm VdU^2 = 0,$$

■

**Observação 3.2.1.** *Note que a equação diferencial binária*

$$v dv^2 + 2(b_1 u + b_2 v) du dv - v du^2 = 0 \quad (3.10)$$

*tem função discriminante dada por*

$$\Delta(u, v) = 4 \left[ (b_1 u + b_2 v)^2 + v^2 \right],$$

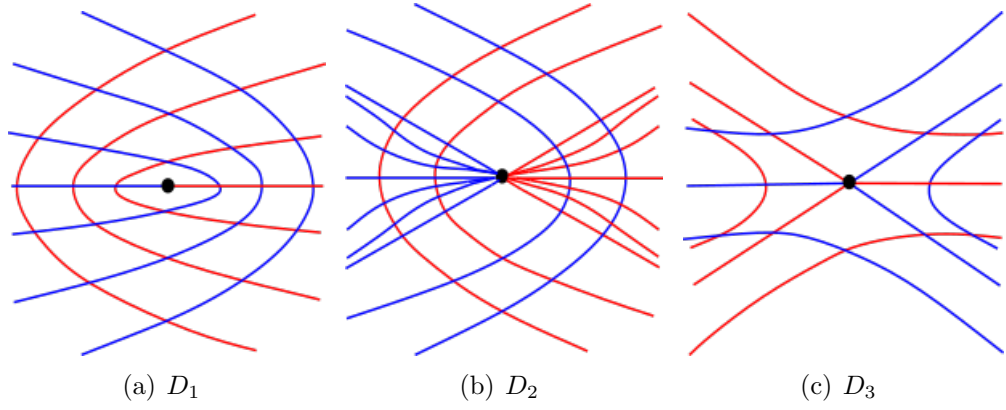
*o que nos diz que a matriz Hessiana no ponto crítico  $(0, 0)$  é dado por*

$$H_\Delta(0, 0) = 4 \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

*assim,  $\det H_\Delta(0, 0) = 4b_1^2 \geq 0$ , ou seja,  $(0, 0)$  é um o ponto crítico não degenerado do tipo isolado para  $b_1 \neq 0$ . Em [2], Bruce e Fidal mostraram que, neste caso, as singularidades do Campo de Lie-Cartan em  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}P^1$  podem ser dos seguintes tipos:*

- a) Uma única sela ( $D_1$ );*
- b) Duas selas e um nó ( $D_2$ );*
- c) Três selas ( $D_3$ ).*

*Graficamente, o comportamento local das curvas integrais do Campo de Lie-Cartan projetadas em  $uv$ , ou seja, o comportamento das curvas integrais da equação (3.1) quando  $(0, 0)$  é um ponto crítico não degenerado do tipo isolado, é o seguinte:*

Figura 3.1: Casos  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$ .

**Observação 3.2.2.** *Note que a equação diferencial binária*

$$vdv^2 + 2(b_1u + b_2v)dudv + vdu^2 = 0 \quad (3.11)$$

*tem função discriminante dada por*

$$\Delta(u, v) = 4 \left[ (b_1u + b_2v)^2 - v^2 \right],$$

*o que nos diz que a matriz Hessiana no ponto crítico  $(0, 0)$  é dado por*

$$H_{\Delta}(0, 0) = 4 \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 \\ b_1b_2 & b_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

*assim,  $\det H_{\Delta}(0, 0) = -4b_1^2 \leq 0$ , ou seja,  $(0, 0)$  é um o ponto crítico não degenerado do tipo cruz para  $b_1 \neq 0$ . Em [3], Bruce e Tari mostraram que, neste caso, as singularidades do Campo de Lie-Cartan em  $\{(0, 0)\} \times \mathbb{RP}^1$  podem ser dos seguintes tipos:*

- a) Uma única sela;*
- b) Um único nó;*
- c) Três selas;*
- d) Duas selas e um nó;*
- e) Dois nós e uma sela.*

*Graficamente, o comportamento local das curvas integrais do Campo de Lie-Cartan projetadas em  $uv$ , ou seja, o comportamento das curvas integrais da equação (3.1) quando  $(0, 0)$  é um ponto crítico não degenerado do tipo cruz, é o seguinte:*

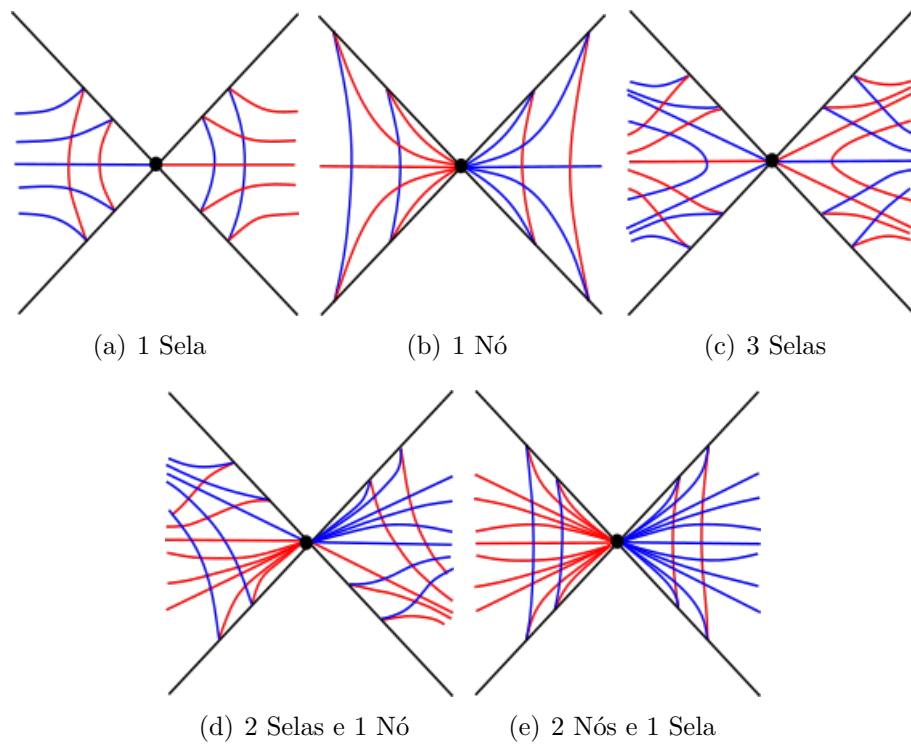


Figura 3.2: Casos listados na observação (3.2.2).

## Capítulo 4

# Singularidades Umbílicas em Congruências no Elipsoide

Neste capítulo, iremos considerar o Elipsoide de três eixos distintos e a congruência de retas gerada quando restringimos ao elipsoide um campo de vetores linear da forma  $\bar{X}(x, y, z) = (Rx, Sy, Qz)$ , com  $R$ ,  $S$  e  $Q$  reais, distintos e não nulos. Nosso objetivo é verificar os pontos do elipsoide onde os coeficientes das formas de Kummer são proporcionais, que chamamos, em (2.1.9), de **singularidades umbílicas da congruência** e estudar o comportamento das curvas diretrizes das superfícies principais, que chamaremos de **curvas principais**, próximas dessas singularidades. Para tanto, iremos estudar as curvas integrais da equação diferencial das superfícies principais (2.4) próximas dessas singularidades. Além disso, apresentaremos duas figuras que descrevem a disposição das curvas principais sobre o elipsoide. Por fim, também iremos analisar o caso em que o campo  $\bar{X}$  possui dois dos seus autovalores sendo complexos e conjugados.

### 4.1 Campos lineares com três autovalores reais, não nulos e distintos

Nesta seção, iremos considerar campos vetoriais da forma  $\bar{X}(x, y, z) = (Rx, Sy, Qz)$ , com  $R$ ,  $S$  e  $Q$  reais, não nulos e distintos. A congruência que iremos analisar será dada por  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ , onde  $r(u, v)$  é uma parametrização do elipsoide como gráfico e  $X(u, v) = \bar{X} \circ r(u, v)$ . A fim de facilitar as nossas contas, não iremos considerar o campo  $X(u, v)$  unitário, o que não afetará os resultados. Iremos considerar as seguintes parametrizações, a fim de cobrir todo o elipsoide:

$$\begin{aligned} \text{a) } r_1(u, v) &= \left( u, v, \frac{\sqrt{A^2B^2 - A^2v^2 - B^2u^2}C}{BA} \right) \\ \text{b) } r_2(u, v) &= \left( u, v, -\frac{\sqrt{A^2B^2 - A^2v^2 - B^2u^2}C}{BA} \right) \end{aligned}$$

$$c) \ r_3(u, z) = \left( u, \frac{\sqrt{-u^2 C^2 - z^2 A^2 + A^2 C^2 B}}{CA}, z \right)$$

$$d) \ r_4(u, z) = \left( u, -\frac{\sqrt{-u^2 C^2 - z^2 A^2 + A^2 C^2 B}}{CA}, z \right)$$

$$e) \ r_5(v, z) = \left( \frac{\sqrt{-v^2 C^2 - z^2 B^2 + B^2 C^2 A}}{CB}, v, z \right)$$

$$f) \ r_6(v, z) = \left( -\frac{\sqrt{-v^2 C^2 - z^2 B^2 + B^2 C^2 A}}{CB}, v, z \right).$$

A análise será análoga para todos os casos e os resultados obtidos coincidem para as cartas  $a)$  e  $b)$  (caso 1), da mesma forma para as cartas  $c)$  e  $d)$  (caso 2) e também para as cartas  $e)$  e  $f)$  (caso 3).

**Proposição 4.1.1.** *Considere a congruência  $\mathcal{C} = \{X(u, v), r(u, v)\}$  e a equação das superfícies principais  $L(u, v)u'^2 + M(u, v)u'v' + N(u, v)v'^2 = 0$ , onde  $L(u, v) = 2fa - e(b + b')$ ,  $M(u, v) = (ag - ec)$  e  $N(u, v) = g(b + b') - 2fc$ . Se  $L = M = 0$ , então  $N = 0$ .*

*Demonstração.* Se temos  $L = M = 0$ , segue que  $\frac{a}{e} = \frac{b + b'}{2f} = \frac{c}{g}$ , portanto,  $N = g(b + b') - 2fc = 0$ . Sabemos que  $e = \langle X_u, X_u \rangle \neq 0$  e  $g = \langle X_v, X_v \rangle \neq 0$ , enquanto que se  $f = \langle X_u, X_v \rangle = 0$  e  $L = M = 0$ , temos  $e(b + b') = 0$ , ou seja,  $b + b' = 0$  e o resultado também é válido. ■

## 4.2 Caso 1)

Consideremos o elipsoide  $\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ ,  $A, B, C > 0$  e a parametrização

$$r(u, v) = \left( u, v, \frac{\sqrt{A^2 B^2 - A^2 v^2 - B^2 u^2} C}{BA} \right).$$

Note que o campo de vetores restrito ao elipsoide é dado por

$$X(u, v) = \left( Ru, Sv, Q \frac{\sqrt{A^2 B^2 - A^2 v^2 - B^2 u^2} C}{BA} \right),$$



assim, temos a congruência  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ . Em seguida, calculamos os termos  $L(u, v)$ ,  $M(u, v)$  e  $N(u, v)$ :

$$\begin{aligned} L(u, v) &= 2 \frac{(Q - R) RC^2 v Qu}{-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2} \\ M(u, v) &= \frac{-A^4 B^4 RS^2 + A^4 B^4 R^2 S + A^4 B^2 R v^2 S^2 - A^4 B^2 R^2 v^2 S - A^4 R Q^2 C^2 v^2}{B^2 (-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2) A^2} \\ &\quad + \frac{A^4 R^2 C^2 v^2 Q + A^2 B^4 R u^2 S^2 - A^2 B^4 R^2 u^2 S + B^4 Q^2 C^2 u^2 S - B^4 C^2 u^2 Q S^2}{B^2 (-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2) A^2} \\ N(u, v) &= -\frac{2(Q - S) SC^2 v Qu}{-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2}. \end{aligned}$$

Em seguida, encontramos  $(u, v)$  que satisfazem simultaneamente  $L = 0$  e  $M = 0$ , a saber, tais pontos são:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\pm u_0, v_0) &= \left( \frac{\sqrt{S(A^2 R^2 - A^2 RS - C^2 Q^2 + C^2 QS) R(B^4 RS - B^4 S^2) A^2}}{B^2 S(A^2 R^2 - A^2 RS - C^2 Q^2 + C^2 QS)}, 0 \right) \\ \text{b) } (u_1, \pm v_1) &= \left( 0, \frac{\sqrt{S(B^2 RS - B^2 S^2 + C^2 Q^2 - C^2 QR) S(R - S) B^2}}{B^2 RS - B^2 S^2 + C^2 Q^2 - C^2 QR} \right). \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Singularidades $r(\pm u_0, v_0)$

Vamos analisar, inicialmente, o que ocorre com os pontos  $(\pm u_0, v_0)$  em termos de singularidades do Campo de Lie-Cartan, para tanto, basta que façamos a análise em  $(u_0, v_0)$ , pois o mesmo irá ocorrer com  $(-u_0, v_0)$ . Considerando  $p = \frac{dv}{du}$ , obtemos

$$T(u, v, p) = N(u, v)p^2 + 2M(u, v)p + L(u, v), \quad (4.1)$$

onde:

$$L = -2 \frac{vR(-R + Q) \sqrt{S^2(A^2 R^2 - A^2 RS - C^2 Q^2 + C^2 QS) RB^4(-S + R)}}{S(Q - S) B^4} + h.o.t. \quad (4.2)$$

$$M = -2 \frac{\sqrt{S^2(A^2 R^2 - A^2 RS - C^2 Q^2 + C^2 QS) RB^4(-S + R)} (uSB^2 A^2 R^2 - uS^2 B^2 A^2 R)}{SB^4 C^2 Q A^2 (Q - S)} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &- 2 \frac{\sqrt{S^2(A^2 R^2 - A^2 RS - C^2 Q^2 + C^2 QS) RB^4(-S + R)} (-uSB^2 C^2 Q^2 + uS^2 B^2 C^2 Q)}{SB^4 C^2 Q A^2 (Q - S)} \\ &+ 2 \frac{S(A^2 R^2 - A^2 RS - C^2 Q^2 + C^2 QS) R(-S + R)}{C^2 Q (Q - S)} + h.o.t. \end{aligned}$$

$$N = 2 \frac{v \sqrt{S^2 (A^2 R^2 - A^2 R S - C^2 Q^2 + C^2 Q S) R B^4 (-S + R)}}{B^4} + h.o.t.$$

Estamos interessados nas singularidades do Campo de Lie-Cartan que são da forma  $(u_0, v_0, p_0)$ , onde  $p_0$  é raiz de  $\varphi(p) = -(T_u(u_0, v_0) + p T_v(u_0, v_0))$ . Assim, sabendo que  $T(u, v, p) = N(u, v)p^2 + 2M(u, v)p + L(u, v)$ , segue que:

$$\begin{aligned} \varphi(p) = & 2 \frac{\sqrt{S^2 (A^2 R^2 - A^2 R S - C^2 Q^2 + C^2 Q S) R B^4 (-S + R)}}{S B^4 C^2 Q A^2 (Q - S)} (-C^2 Q^2 A^2 S + C^2 Q A^2 S^2) p^3 \\ & + 2 \frac{\sqrt{S^2 (A^2 R^2 - A^2 R S - C^2 Q^2 + C^2 Q S) R B^4 (-S + R)}}{S B^4 C^2 Q A^2 (Q - S)} (-2 B^2 Q^2 C^2 S + C^2 Q^2 A^2 R + 2 B^2 C^2 Q S^2) p \\ & + 2 \frac{\sqrt{S^2 (A^2 R^2 - A^2 R S - C^2 Q^2 + C^2 Q S) R B^4 (-S + R)}}{S B^4 C^2 Q A^2 (Q - S)} (-Q C^2 A^2 R^2 - 2 A^2 B^2 R S^2 + 2 A^2 B^2 R^2 S) p \end{aligned}$$

A partir daqui, iremos especificar algumas condições importantes para a análise das singularidades do Campo de Lie-Cartan. A primeira condição tem por objetivo fazer com que  $(u_0, v_0)$  exista e pertença ao domínio da parametrização que estamos considerando:

• **Condição 1:**

$$\begin{aligned} S^2 \left( -A^2 R S + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 Q S \right) R B^4 (-S + R) &> 0 \quad e \\ \frac{B^2 A^2 C^2 Q (S - Q)}{-A^2 R S + A^2 R^2 - Q^2 C^2 + C^2 Q S} &> 0. \end{aligned}$$

Considerando que a condição acima deve sempre ser satisfeita para que a nossa análise faça sentido, segue que só precisaremos analisar os seguintes casos:

- $R > S > Q > 0$
- $Q > S > R > 0$
- $R < S < Q < 0$
- $Q < S < R < 0$
- $S < R < 0 < Q$
- $S < Q < 0 < R$
- $S > R > 0 > Q$
- $S > Q > 0 > R$ .

Considerando  $p = \frac{dv}{du}$ , obtemos a partir da equação das superfícies principais

$$T(u, v, p) = N(u, v)p^2 + 2M(u, v)p + L(u, v).$$

Conforme visto no capítulo anterior, a superfície de Lie-Cartan é dada por  $M = T^{-1}(0)$ , ou seja,  $M = \{(u, v, p) : T(u, v, p) = 0\}$ . Vimos ainda que, considerando  $\Delta = 4(M^2 - LN)$  o discriminante de (4.1) e  $H_\Delta(u_0, v_0)$  a Hessiana de  $\Delta$  em  $(u_0, v_0)$ , temos que  $\det(H_\Delta(u_0, v_0)) \neq 0$  é uma condição necessária e suficiente para que  $M$  seja regular. Segue das expressões dadas em (4.2) para  $L$ ,  $M$  e  $N$  que:

$$\det(H_\Delta(u_0, v_0)) = 1024 \frac{(-A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS)^4 S^3 R^3 (-S + R)^2 (Q - R)}{B^4 Q^2 C^4 A^4 (-S + Q)^3}. \quad (4.4)$$

Desde que  $R$ ,  $S$  e  $Q$  são não nulos e distintos, temos que

$$\det(H_\Delta(u_0, v_0)) \neq 0 \Leftrightarrow -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS \neq 0. \quad (4.5)$$

Note que a **condição 1** garante a regularidade da superfície de Lie-Cartan  $M$ . Como sabemos, as singularidades do Campo de Lie-Cartan que queremos estudar são da forma  $(u_0, v_0, p_0)$ , onde  $p_0$  é raiz de  $\varphi(p) = -(T_u(u_0, v_0) + pT_v(u_0, v_0))$ , assim, sabendo que  $T(u, v, p) = N(u, v)p^2 + 2M(u, v)p + L(u, v)$ , segue que:

$$\varphi(p) = \bar{a}p^3 + \bar{b}p, \quad (4.6)$$

onde

$$\bar{a} = (-C^2Q^2A^2S + C^2QA^2S^2) \quad (4.7)$$

$$\bar{b} = (A^2C^2QR)(Q - R) + 2A^2B^2RS(-S + R) - 2B^2C^2QS(-S + Q) \quad (4.8)$$

Segue da **condição 1** e do fato de  $R$ ,  $S$  e  $Q$  serem não nulos e distintos que  $\bar{a}$  é não nulo. Logo,  $\varphi$  é uma cúbica que possui uma ou três raízes. Tome:

- $p_0 = 0$
- $\pm p_1 = \pm \frac{\sqrt{QS(-S+Q)[2B^2C^2QS(S-Q)+2B^2A^2RS(R-S)+A^2C^2RQ(Q-R)]}}{QS(-S+Q)CA}$ .

Dessa forma, seja:

- **Condição 2:**

$$QS(-S + Q)[2B^2C^2QS(S - Q) + 2B^2A^2RS(R - S) + A^2C^2RQ(Q - R)] > 0.$$

Note que, se a **condição 2** é satisfeita,  $\varphi$  tem 3 raízes, a saber,  $p_0$ ,  $p_1$  e  $-p_1$ , o que nos diz que o campo de Lie-Cartan tem 3 pontos singulares. No entanto, se ela não é satisfeita,  $p_0 = 0$  é a única raiz de  $\varphi$  e  $(u_0, v_0, 0)$  a única singularidade do campo de Lie-Cartan.

Sabemos que a regularidade da superfície  $M$  também pode ser verificada por  $T_u(u_0, v_0, p_j) \neq 0$  ou  $T_v(u_0, v_0, p_j) \neq 0$ ,  $j \in \{0, 1\}$ . Neste caso, temos  $T_v(u_0, v_0, p_j) \neq 0$ . Assim, segue do Teorema da Função Implícita (Ver [14]) que, numa vizinhança de  $(u_0, v_0, p_j)$ , a superfície  $M$  é o gráfico de  $v = v(u, p)$ .

Considerando  $p_0 = 0$  vamos encontrar a expressão de  $v(u, p)$  a partir da expansão de Taylor em torno de ponto  $(u_0, 0)$ . Dessa forma, consideremos

$$v(u, p) = a_{10}(u - u_0) + a_{01}p + \frac{a_{20}}{2}(u - u_0)^2 + \frac{a_{02}}{2}p^2 + a_{11}(u - u_0)p + h.o.t., \quad (4.9)$$

onde  $a_{ij} = \frac{\partial^{i+j}v}{\partial u^i \partial p^j}(0, 0)$ . Como  $T(u, v(u, p), p) = 0$  segue que derivando em relação a  $u$ , temos:

$$T_u(u_0, v_0, 0) + T_v(u_0, v_0, 0)v_u(u_0, v_0, 0) = 0 \Rightarrow v_u(u_0, v_0, 0) = a_{10} = \frac{-T_u}{T_v}(u_0, v_0, 0). \quad (4.10)$$

Note que o denominador da expressão acima é não nulo, por hipótese. Considerando as expressões de  $L$ ,  $M$  e  $N$  dadas em (4.2), a consequente expressão de (4.1) e procedendo de maneira análoga ao feito acima, encontramos os demais termos  $a_{ij}$  da expressão (4.9), o que nos leva a:

$$v(u, p) = -2 \frac{p(-B^2 A^2 R S^2 + B^2 A^2 R^2 S + B^2 C^2 Q S^2 - B^2 Q^2 C^2 S) u}{(Q - R) R C^2 Q A^2} \quad (4.11)$$

$$- 2 \frac{p \sqrt{S^2 (-A^2 R S + A^2 R^2 + C^2 Q S - Q^2 C^2) R B^4 (-S + R)}}{(Q - R) R C^2 Q} + h.o.t. \quad (4.12)$$

Considerando  $v = v(u, p)$  e projetando o campo de Lie-Cartan em  $up$ , temos:

$$u' = \frac{(8 p^2 S Q - 8 p^2 S^2 - 4 R^2 + 4 Q R) (-A^2 R S + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 Q S)}{B^2 C^2 Q A^2 R (Q - R) (-S + Q)} \mu_1^* \quad (4.13)$$

$$p' = 2 \frac{p \sqrt{S^2 (-A^2 R S + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 Q S) R B^4 (-S + R)}}{B^4 C^2 Q A^2 (-S + Q) S} \mu_2^*,$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= B^2 A^2 R^2 S - B^2 A^2 R S^2 \\ &\quad - \sqrt{S^2 (-A^2 R S + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 Q S) R B^4 (-S + R)} u \\ \mu_2^* &= -2 B^2 A^2 R S^2 + 2 B^2 A^2 R^2 S - 2 B^2 Q^2 C^2 S + 2 B^2 C^2 Q S^2 \\ &\quad + C^2 Q A^2 p^2 S^2 - C^2 Q^2 A^2 p^2 S + C^2 Q^2 A^2 R - C^2 Q A^2 R^2. \end{aligned}$$

Linearizando o campo de Lie-Cartan projetado em  $up$  em  $(u_0, 0)$ , obtemos os seguintes

autovalores:

$$\lambda_1 = \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S+Q)} \quad (4.14)$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S+Q)S}, \quad (4.15)$$

onde

$$\xi = S^2 \left( -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS \right) RB^4 (-S + R)$$

$$\epsilon = -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS$$

$$\beta = -2B^2A^2RS^2 + 2B^2A^2R^2S - 2B^2Q^2C^2S + 2B^2C^2QS^2 + C^2Q^2A^2R - C^2QA^2R^2.$$

Seguindo de maneira análoga para as singularidades  $(u_0, v_0, \pm p_1)$ , obtemos a expressão de  $v(u, p)$  numa vizinhança de  $(u_0, \pm p_1)$  e a projeção do campo de Lie-Cartan em  $up$ . Assim, a partir da sua linearização em  $(u_0, \pm p_1)$ , obtemos os seguintes autovalores:

$$\gamma_1 = \frac{4\sqrt{\xi}\Omega}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)} \quad (4.16)$$

$$\gamma_2 = \frac{-4\sqrt{\xi}\beta}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)}, \quad (4.17)$$

onde

$$\xi = S^2 \left( -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS \right) RB^4 (-S + R)$$

$$\epsilon = -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS$$

$$\Omega = -B^2Q^2C^2S + C^2Q^2A^2R + B^2C^2QS^2 - QC^2A^2R^2 - B^2A^2RS^2 + B^2A^2R^2S$$

$$\beta = -2B^2A^2RS^2 + 2B^2A^2R^2S - 2B^2Q^2C^2S + 2B^2C^2QS^2 + C^2Q^2A^2R - C^2QA^2R^2$$

## 4.2.2 Campos lineares com todos os autovalores positivos ou todos os autovalores negativos

**Proposição 4.2.1.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

*i)  $R > S > Q > 0$  (Resp.  $R < S < Q < 0$ )*

*ii)  $S^2 (-A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS) RB^4 (-S + R) > 0$ .*

Sejam ainda

$$\begin{aligned}\xi &= S^2 \left( -A^2 RS + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 QS \right) RB^4 (-S + R) \\ \epsilon &= -A^2 RS + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 QS \\ \Omega &= -B^2 Q^2 C^2 S + C^2 Q^2 A^2 R + B^2 C^2 QS^2 - QC^2 A^2 R^2 - B^2 A^2 RS^2 + B^2 A^2 R^2 S \\ \beta &= -2 B^2 A^2 RS^2 + 2 B^2 A^2 R^2 S - 2 B^2 Q^2 C^2 S + 2 B^2 C^2 QS^2 + C^2 Q^2 A^2 R - C^2 QA^2 R^2. \\ \overline{\Delta} &= QS (Q - S) \beta.\end{aligned}$$

Então:

- a) Se  $\beta > 0$  (Resp.  $\beta < 0$ ), temos uma única sela;  
b) Se  $\beta < 0$  (Resp.  $\beta > 0$ ), temos duas selas e um nó.

*Demonstração.* Das hipóteses i) e ii), temos que  $\xi > 0$ ,  $Q - R < 0$  e  $Q - S < 0$ , assim, temos por (4.4) que  $\det(H_\Delta(u_0, v_0)) > 0$  e  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico não degenerado do tipo isolado para  $\Delta$ , que é o discriminante da equação das superfícies principais. Sendo  $\xi > 0$  e  $R - S > 0$ , temos  $\epsilon > 0$ . Note que

$$\begin{aligned}\beta &= 2B^2 C^2 QS (S - Q) + 2B^2 A^2 RS (R - S) + A^2 C^2 RQ (Q - R) \\ &= 2B^2 S\epsilon + A^2 C^2 RQ (Q - R),\end{aligned}$$

logo, sendo  $A^2 C^2 RQ (Q - R) < 0$  e  $2B^2 S\epsilon > 0$  não podemos concluir nada a respeito do sinal de  $\beta$  e por isso, temos que analisar os casos a) e b).

- a) Como  $\beta > 0$ , segue que  $\overline{\Delta} < 0$ , portanto, a **condição 2** não é satisfeita e  $\varphi$  possui uma única raiz, ou seja, o campo de Lie-Cartan possui uma única singularidade, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ , cujos autovalores associados são:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2 C^2 QA^2 (-S + Q)} \\ \lambda_2 &= \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4 C^2 QA^2 (-S + Q) S}.\end{aligned}$$

Lembremos que  $\epsilon > 0$ , logo,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , o que implica uma única sela. Sendo  $(u_0, v_0)$  ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_1$ , conforme visto no capítulo anterior.

- b) Sendo  $\beta < 0$ , temos que  $\overline{\Delta} > 0$ , o que nos diz que  $\varphi$  tem três raízes reais e o campo de Lie-Cartan tem três pontos singulares, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ ,  $(u_0, v_0, p_1)$  e  $(u_0, v_0, -p_1)$ . De modo análogo ao feito no caso a), temos que os autovalores associados a  $(u_0, v_0, 0)$

são tais que:

$$\lambda_1 = \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S+Q)} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S+Q)S} > 0.$$

Note que de  $\beta < 0$ , temos que

$$2B^2C^2QS(S-Q) + 2B^2A^2RS(R-S) + A^2C^2RQ(Q-R) < 0,$$

mas sendo  $R > S > Q > 0$ , segue que  $2B^2C^2QS(S-Q) > 0$ ,  $2B^2A^2RS(R-S) > 0$  e  $A^2C^2RQ(Q-R) < 0$ , portanto,

$$\Omega = B^2C^2QS(S-Q) + B^2A^2RS(R-S) + A^2C^2RQ(Q-R) < 0$$

logo, sendo os autovalores associados às singularidades  $(u_0, v_0, \pm p_1)$  dados por:

$$\gamma_1 = \frac{4\sqrt{\xi}\Omega}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)}$$

$$\gamma_2 = \frac{-4\sqrt{\xi}\beta}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)},$$

temos  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 < 0$ . Dessa forma, temos duas selas e um nó. Como  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_2$ . ■

**Proposição 4.2.2.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

- i)  $Q > S > R > 0$  (Resp.  $Q < S < R < 0$ )*
- ii)  $S^2(-A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS)RB^4(-S+R) > 0$ .*

*Sejam ainda*

$$\xi = S^2(-A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS)RB^4(-S+R)$$

$$\epsilon = -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS$$

$$\Omega = -B^2Q^2C^2S + C^2Q^2A^2R + B^2C^2QS^2 - QC^2A^2R^2 - B^2A^2RS^2 + B^2A^2R^2S$$

$$\beta = -2B^2A^2RS^2 + 2B^2A^2R^2S - 2B^2Q^2C^2S + 2B^2C^2QS^2 + C^2Q^2A^2R - C^2QA^2R^2.$$

$$\bar{\Delta} = QS(Q-S)\beta.$$

*Então:*

- a) Se  $\beta < 0$  (Resp.  $\beta > 0$ ), temos uma única sela;*

b) Se  $\beta > 0$  (Resp.  $\beta < 0$ ), temos duas selas e um nó.

*Demonstração.* Das hipóteses i) e ii), temos que  $\xi > 0$ ,  $Q - R > 0$  e  $Q - S > 0$ , assim, temos por (4.4) que  $\det(H_\Delta(u_0, v_0)) > 0$  e  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico não degenerado do tipo isolado para  $\Delta$ , que é o discriminante da equação das superfícies principais. Sendo  $\xi > 0$  e  $R - S < 0$ , temos  $\epsilon < 0$ . Note que

$$\begin{aligned}\beta &= 2B^2C^2QS(S - Q) + 2B^2A^2RS(R - S) + A^2C^2RQ(Q - R) \\ &= 2B^2S\epsilon + A^2C^2RQ(Q - R),\end{aligned}$$

logo, sendo  $A^2C^2RQ(Q - R) > 0$  e  $2B^2S\epsilon < 0$  não podemos concluir nada a respeito do sinal de  $\beta$  e por isso, temos que analisar os casos a) e b).

a) Como  $\beta < 0$ , segue que  $\bar{\Delta} < 0$ , portanto, a **condição 2** não é satisfeita e  $\varphi$  possui uma única raiz, ou seja, o campo de Lie-Cartan possui uma única singularidade, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ , cujos autovalores associados são:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S + Q)} \\ \lambda_2 &= \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S + Q)S}.\end{aligned}$$

Lembremos que  $\epsilon < 0$ , logo,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , o que implica uma única sela. Sendo  $(u_0, v_0)$  ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_1$ .

b) Sendo  $\beta > 0$ , temos que  $\bar{\Delta} > 0$ , o que nos diz que  $\varphi$  tem três raízes reais e o campo de Lie-Cartan tem três pontos singulares, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ ,  $(u_0, v_0, p_1)$  e  $(u_0, v_0, -p_1)$ . De modo análogo ao feito no caso a), temos que os autovalores associados a  $(u_0, v_0, 0)$  são tais que:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S + Q)} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S + Q)S} > 0.\end{aligned}$$

Note que de  $\beta > 0$ , temos que

$$2B^2C^2QS(S - Q) + 2B^2A^2RS(R - S) + A^2C^2RQ(Q - R) > 0,$$

mas sendo  $R > S > Q > 0$ , segue que  $2B^2C^2QS(S - Q) < 0$ ,  $2B^2A^2RS(R - S) < 0$  e  $A^2C^2RQ(Q - R) > 0$ , portanto,

$$\Omega = B^2C^2QS(S - Q) + B^2A^2RS(R - S) + A^2C^2RQ(Q - R) > 0,$$



logo, sendo os autovalores associados às singularidades  $(u_0, v_0, \pm p_1)$  dados por:

$$\gamma_1 = \frac{4\sqrt{\xi}\Omega}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)}$$

$$\gamma_2 = \frac{-4\sqrt{\xi}\beta}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)},$$

temos  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 < 0$ . Dessa forma, temos duas selas e um nó. Como  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_2$ . ■

### 4.2.3 Campos lineares com dois os autovalores positivos e um negativo ou dois autovalores negativos e um positivo

**Proposição 4.2.3.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

- i)  $S > R > 0 > Q$  (Resp.  $S < R < 0 < Q$ )*
- ii)  $S^2(-A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS)RB^4(-S + R) > 0$ .*

*Sejam ainda*

$$\begin{aligned}\xi &= S^2(-A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS)RB^4(-S + R) \\ \epsilon &= -A^2RS + A^2R^2 - C^2Q^2 + C^2QS \\ \Omega &= -B^2Q^2C^2S + C^2Q^2A^2R + B^2C^2QS^2 - QC^2A^2R^2 - B^2A^2RS^2 + B^2A^2R^2S \\ \beta &= -2B^2A^2RS^2 + 2B^2A^2R^2S - 2B^2Q^2C^2S + 2B^2C^2QS^2 + C^2Q^2A^2R - C^2QA^2R^2. \\ \bar{\Delta} &= QS(Q - S)\beta.\end{aligned}$$

*Então:*

- a) Se  $\beta < 0$  (Resp.  $\beta > 0$ ), temos uma única sela;*
- b) Se  $\beta > 0$  (Resp.  $\beta < 0$ ), temos duas selas e um nó.*

*Demonstração.* Das hipóteses *i)* e *ii)*, temos que  $\xi > 0$ ,  $SR > 0$ ,  $Q - R < 0$  e  $Q - S < 0$ , assim, temos por (4.4) que  $\det(H_\Delta(u_0, v_0)) > 0$  e  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico não degenerado do tipo isolado para  $\Delta$ , que é o discriminante da equação das superfícies principais. Sendo  $\xi > 0$ ,  $SR > 0$ ,  $B^4S > 0$  e  $R - S < 0$ , temos  $\epsilon < 0$ . Note que

$$\begin{aligned}\beta &= 2B^2C^2QS(S - Q) + 2B^2A^2RS(R - S) + A^2C^2RQ(Q - R) \\ &= 2B^2S\epsilon + A^2C^2RQ(Q - R),\end{aligned}$$

logo, sendo  $A^2C^2RQ(Q - R) > 0$  e  $2B^2S\epsilon < 0$  não podemos concluir nada a respeito do sinal de  $\beta$  e por isso, temos que analisar os casos *a)* e *b)*.

- a) Como  $\beta < 0$ , segue que  $\bar{\Delta} < 0$ , portanto, a **condição 2** não é satisfeita e  $\varphi$  possui uma única raiz, ou seja, o campo de Lie-Cartan possui uma única singularidade, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ , cujos autovalores associados são:

$$\lambda_1 = \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S+Q)}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S+Q)S}.$$

Lembremos que  $\epsilon < 0$ , logo,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , o que implica uma única sela. Sendo  $(u_0, v_0)$  ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_1$ .

- b) Sendo  $\beta > 0$ , temos que  $\bar{\Delta} > 0$ , o que nos diz que  $\varphi$  tem três raízes reais e o campo de Lie-Cartan tem três pontos singulares, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ ,  $(u_0, v_0, p_1)$  e  $(u_0, v_0, -p_1)$ . De modo análogo ao feito no caso a), temos que os autovalores associados a  $(u_0, v_0, 0)$  são tais que:

$$\lambda_1 = \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S+Q)} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S+Q)S} > 0.$$

Note que de  $\beta > 0$ , temos que

$$2B^2C^2QS(S-Q) + 2B^2A^2RS(R-S) + A^2C^2RQ(Q-R) > 0,$$

mas sendo  $S > R > 0 > Q$ , segue que  $2B^2C^2QS(S-Q) < 0$ ,  $2B^2A^2RS(R-S) < 0$  e  $A^2C^2RQ(Q-R) > 0$ , portanto,

$$\Omega = B^2C^2QS(S-Q) + B^2A^2RS(R-S) + A^2C^2RQ(Q-R) > 0,$$

logo, sendo os autovalores associados às singularidades  $(u_0, v_0, \pm p_1)$  dados por:

$$\gamma_1 = \frac{4\sqrt{\xi}\Omega}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)}$$

$$\gamma_2 = \frac{-4\sqrt{\xi}\beta}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)},$$

temos  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 < 0$ . Dessa forma, temos duas selas e um nó. Como  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_2$ .

■

**Proposição 4.2.4.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

i)  $S > Q > 0 > R$  (Resp.  $S < Q < 0 < R$ )

ii)  $S^2 (-A^2 RS + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 QS) RB^4 (-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\xi = S^2 (-A^2 RS + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 QS) RB^4 (-S + R)$$

$$\epsilon = -A^2 RS + A^2 R^2 - C^2 Q^2 + C^2 QS$$

$$\Omega = -B^2 Q^2 C^2 S + C^2 Q^2 A^2 R + B^2 C^2 Q S^2 - Q C^2 A^2 R^2 - B^2 A^2 R S^2 + B^2 A^2 R^2 S$$

$$\beta = -2 B^2 A^2 R S^2 + 2 B^2 A^2 R^2 S - 2 B^2 Q^2 C^2 S + 2 B^2 C^2 Q S^2 + C^2 Q^2 A^2 R - C^2 Q A^2 R^2.$$

$$\bar{\Delta} = QS (Q - S) \beta.$$

Então:

a) Se  $\beta > 0$  (Resp.  $\beta < 0$ ), temos uma única sela;

b) Se  $\beta < 0$  (Resp.  $\beta > 0$ ), temos duas selas e um nó.

*Demonstração.* Das hipóteses i) e ii), temos que  $\xi > 0$ ,  $SR < 0$ ,  $Q - R > 0$  e  $Q - S < 0$ , assim, temos por (4.4) que  $\det(H_{\Delta}(u_0, v_0)) > 0$  e  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico não degenerado do tipo isolado para  $\Delta$ , que é o discriminante da equação das superfícies principais. Sendo  $\xi > 0$ ,  $SR < 0$ ,  $B^4 S > 0$  e  $R - S < 0$ , temos  $\epsilon > 0$ . Note que

$$\begin{aligned} \beta &= 2B^2 C^2 QS (S - Q) + 2B^2 A^2 RS (R - S) + A^2 C^2 RQ (Q - R) \\ &= 2B^2 S \epsilon + A^2 C^2 RQ (Q - R), \end{aligned}$$

logo, sendo  $A^2 C^2 RQ (Q - R) < 0$  e  $2B^2 S \epsilon > 0$  não podemos concluir nada a respeito do sinal de  $\beta$  e por isso, temos que analisar os casos a) e b).

a) Como  $\beta > 0$ , segue que  $\bar{\Delta} < 0$ , portanto, a **condição 2** não é satisfeita e  $\varphi$  possui uma única raiz, ou seja, o campo de Lie-Cartan possui uma única singularidade, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ , cujos autovalores associados são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2 C^2 Q A^2 (-S + Q)} \\ \lambda_2 &= \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4 C^2 Q A^2 (-S + Q) S}. \end{aligned}$$

Lembremos que  $\epsilon > 0$ , logo,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ , o que implica uma única sela. Sendo  $(u_0, v_0)$  ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_1$ .

b) Sendo  $\beta < 0$ , temos que  $\bar{\Delta} > 0$ , o que nos diz que  $\varphi$  tem três raízes reais e o campo de Lie-Cartan tem três pontos singulares, a saber,  $(u_0, v_0, 0)$ ,  $(u_0, v_0, p_1)$  e  $(u_0, v_0, -p_1)$ .

De modo análogo ao feito no caso  $a$ ), temos que os autovalores associados a  $(u_0, v_0, 0)$  são tais que:

$$\lambda_1 = \frac{-4\sqrt{\xi}\epsilon}{B^2C^2QA^2(-S+Q)} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{2\sqrt{\xi}\beta}{B^4C^2QA^2(-S+Q)S} > 0.$$

Note que de  $\beta < 0$ , temos que

$$2B^2C^2QS(S-Q) + 2B^2A^2RS(R-S) + A^2C^2RQ(Q-R) < 0,$$

mas sendo  $S > Q > 0 > R$ , segue que  $2B^2C^2QS(S-Q) > 0$ ,  $2B^2A^2RS(R-S) > 0$  e  $A^2C^2RQ(Q-R) < 0$ , portanto,

$$\Omega = B^2C^2QS(S-Q) + B^2A^2RS(R-S) + A^2C^2RQ(Q-R) < 0,$$

logo, sendo os autovalores associados às singularidades  $(u_0, v_0, \pm p_1)$  dados por:

$$\gamma_1 = \frac{4\sqrt{\xi}\Omega}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)}$$

$$\gamma_2 = \frac{-4\sqrt{\xi}\beta}{SB^4A^2C^2Q(-S+Q)},$$

temos  $\gamma_1 > 0$  e  $\gamma_2 < 0$ . Dessa forma, temos duas selas e um nó. Como  $(u_0, v_0)$  é um ponto crítico isolado do discriminante da binária, segue que esse ponto é do tipo  $D_2$ . ■

#### 4.2.4 Singularidades $r(u_1, \pm v_1)$

Agora, vamos analisar o que ocorre com os pontos  $r(u_1, \pm v_1)$  em termos de singularidades do Campo de Lie-Cartan, para tanto, basta que façamos a análise em  $(u_1, v_1)$ , pois o mesmo irá ocorrer com  $(u_1, -v_1)$ . A fim de garantir que  $(u_1, v_1)$  exista e pertença ao domínio da parametrização que estamos considerando, devemos ter:

- $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S+R) > 0$
- $\frac{A^2B^2C^2Q(Q-R)}{-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q} > 0.$

Segue das condições acima, que nossa análise só deve ser feita para os seguintes casos:

- $S > R > Q > 0$
- $Q > R > S > 0$

- $S < R < Q < 0$
- $Q < R < S < 0$
- $R < S < 0 < Q$
- $R < Q < 0 < S$
- $R > S > 0 > Q$
- $R > Q > 0 > S$ .

Considerando a carta  $q = \frac{dv}{du}$ , obtemos a partir da equação das superfícies principais

$$T(u, v, q) = L(u, v)q^2 + 2M(u, v)q + N(u, v). \quad (4.18)$$

Seguindo de maneira análoga ao feito para a singularidade  $r(u_0, v_0)$ , encontramos uma cúbica  $\bar{\varphi}(q) = \bar{c}q^3 + \bar{d}q$ , cujas raízes  $q$ , são tais que  $(u_1, v_1, q)$  são singularidades do Campo de Lie-Cartan. Para a singularidade  $(u_1, v_1, 0)$ , os autovalores são:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{-2\bar{\beta}\sqrt{\bar{\xi}}}{A^2B^2C^2Q(Q-R)} \quad (4.19)$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{4R\bar{\epsilon}\sqrt{\bar{\xi}}}{B^2C^2Q(Q-R)}. \quad (4.20)$$

Enquanto que para as singularidades  $(u_1, v_1, q_1)$  os autovalores são:

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{-4\bar{\Omega}\sqrt{\bar{\xi}}}{A^2B^2C^2Q(Q-R)} \quad (4.21)$$

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{4\bar{\beta}\sqrt{\bar{\xi}}}{A^2B^2C^2Q(Q-R)}, \quad (4.22)$$

onde:

$$\bar{\xi} = (-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R)$$

$$\bar{\epsilon} = -B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q$$

$$\bar{\beta} = 2Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - 2QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 - 2A^2B^2RS^2 + 2A^2B^2R^2S$$

$$\bar{\Omega} = Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 + A^2B^2R^2S - A^2B^2RS^2$$

Seguindo de maneira análoga ao feito na seção anterior, obtemos as seguintes proposições, cujas demonstrações serão omitidas por serem semelhantes ao já feito:

**Proposição 4.2.5.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

i)  $S > R > Q > 0$  (Resp.  $S < R < Q < 0$ )

ii)  $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\bar{\xi} = (-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R)$$

$$\bar{\epsilon} = -B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q$$

$$\bar{\beta} = 2Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - 2QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 - 2A^2B^2RS^2 + 2A^2B^2R^2S$$

$$\bar{\Omega} = Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 + A^2B^2R^2S - A^2B^2RS^2$$

$$\bar{\Delta} = QR(R - Q)\bar{\beta}.$$

Então:

a) Se  $\bar{\beta} < 0$  (Resp.  $\bar{\beta} > 0$ ), temos uma única sela;

b) Se  $\bar{\beta} > 0$  (Resp.  $\bar{\beta} < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.2.6.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

i)  $Q > R > S > 0$  (Resp.  $Q < R < S < 0$ )

ii)  $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\bar{\xi} = (-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R)$$

$$\bar{\epsilon} = -B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q$$

$$\bar{\beta} = 2Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - 2QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 - 2A^2B^2RS^2 + 2A^2B^2R^2S$$

$$\bar{\Omega} = Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 + A^2B^2R^2S - A^2B^2RS^2$$

$$\bar{\Delta} = QR(R - Q)\bar{\beta}.$$

Então:

a) Se  $\bar{\beta} > 0$  (Resp.  $\bar{\beta} < 0$ ), temos uma única sela;

b) Se  $\bar{\beta} < 0$  (Resp.  $\bar{\beta} > 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.2.7.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

i)  $R < S < 0 < Q$  (Resp.  $R > S > 0 > Q$ )

ii)  $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\bar{\xi} = (-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q) S (-S + R)$$

$$\bar{\epsilon} = -B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q$$

$$\bar{\beta} = 2Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - 2QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 - 2A^2B^2RS^2 + 2A^2B^2R^2S$$

$$\bar{\Omega} = Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 + A^2B^2R^2S - A^2B^2RS^2$$

$$\bar{\Delta} = QR(R - Q) \bar{\beta}.$$

Então:

- a) Se  $\bar{\beta} < 0$  (Resp.  $\bar{\beta} > 0$ ), temos uma única sela;
- b) Se  $\bar{\beta} > 0$  (Resp.  $\bar{\beta} < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.2.8.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

- i)  $R < Q < 0 < S$  (Resp.  $R > Q > 0 > S$ )
- ii)  $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q) S (-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\bar{\xi} = (-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q) S (-S + R)$$

$$\bar{\epsilon} = -B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q$$

$$\bar{\beta} = 2Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - 2QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 - 2A^2B^2RS^2 + 2A^2B^2R^2S$$

$$\bar{\Omega} = Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 + A^2B^2R^2S - A^2B^2RS^2$$

$$\bar{\Delta} = QR(R - Q) \bar{\beta}.$$

Então:

- a) Se  $\bar{\beta} > 0$  (Resp.  $\bar{\beta} < 0$ ), temos uma única sela;
- b) Se  $\bar{\beta} < 0$  (Resp.  $\bar{\beta} > 0$ ), temos duas selas e um nó.

### 4.3 Caso 2)

Consideremos o elipsoide  $\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ ,  $A, B, C > 0$  e a parametrização

$$r(u, z) = \left( u, \frac{\sqrt{-u^2 C^2 - z^2 A^2 + A^2 C^2 B}}{CA}, z \right).$$

Note que o campo de vetores restrito ao elipsoide é dado por

$$X(u, z) = \left( Ru, S \frac{\sqrt{-u^2 C^2 - z^2 A^2 + A^2 C^2 B}}{CA}, Qz \right),$$

assim, temos a congruência  $\{X(u, z), r(u, z)\}$ . As singularidades encontradas estão em:

$$\text{a) } (\pm u_2, z_2) = \left( \frac{\sqrt{-Q(A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) R(-C^4 Q^2 + C^4 QR) A^2}}{Q(A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) C^2}, 0 \right)$$

$$\text{b) } (u_3, \pm z_3) = \left( 0, \frac{\sqrt{(-C^2 RQ + Q^2 C^2 + RB^2 S - B^2 S^2) Q(Q - R) C^2}}{-C^2 RQ + Q^2 C^2 + RB^2 S - B^2 S^2} \right).$$

#### 4.3.1 Singularidades $r(\pm u_2, z_2)$

A fim de garantir que  $(\pm u_2, z_2)$  existem e estão no domínio das parametrizações consideradas, devemos ter:

- $(A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) S(S - Q) > 0$
- $Q^2 C^4 (A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) R(Q - R) > 0$ .

Considerando que as condições acima devem sempre ser satisfeitas para que a nossa análise faça sentido, segue que só precisaremos analisar os seguintes casos:

- $R > Q > S > 0$
- $S > Q > R > 0$
- $R < Q < S < 0$
- $S < Q < R < 0$
- $Q < R < 0 < S$
- $Q < S < 0 < R$
- $Q > R > 0 > S$
- $Q > S > 0 > R$ .



Seguindo de maneira análoga ao feito na seção anterior, obtemos as seguintes proposições, cujas demonstrações serão omitidas por serem semelhantes ao já feito:

**Proposição 4.3.1.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) R > Q > S > 0 \text{ (Resp. } R < Q < S < 0)$$

$$ii) Q^2 C^4 (A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) R (Q - R) > 0.$$

*Sejam ainda*

$$\psi = -Q (A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) R (-C^4 Q^2 + C^4 QR)$$

$$\sigma = A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2$$

$$\rho = -2C^2 A^2 R^2 Q + 2C^2 A^2 RQ^2 - 2C^2 B^2 SQ^2 + 2C^2 S^2 B^2 Q - B^2 S^2 A^2 R + B^2 SA^2 R^2$$

$$\omega = C^2 A^2 RQ^2 - C^2 B^2 SQ^2 - C^2 A^2 R^2 Q + C^2 S^2 B^2 Q - B^2 S^2 A^2 R + B^2 SA^2 R^2$$

$$\overline{\Delta} = QS (Q - S) \rho.$$

*Então:*

a) *Se  $\rho < 0$  (Resp.  $\rho > 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\rho > 0$  (Resp.  $\rho < 0$ ), temos duas selas e um nó.*

**Proposição 4.3.2.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) S > Q > R > 0 \text{ (Resp. } S < Q < R < 0)$$

$$ii) (-B^2 S^2 + B^2 RS + Q^2 C^2 - RC^2 Q) S (-S + R) > 0.$$

*Sejam ainda*

$$\psi = -Q (A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2) R (-C^4 Q^2 + C^4 QR)$$

$$\sigma = A^2 RQ - A^2 R^2 - B^2 SQ + B^2 S^2$$

$$\rho = -2C^2 A^2 R^2 Q + 2C^2 A^2 RQ^2 - 2C^2 B^2 SQ^2 + 2C^2 S^2 B^2 Q - B^2 S^2 A^2 R + B^2 SA^2 R^2$$

$$\omega = C^2 A^2 RQ^2 - C^2 B^2 SQ^2 - C^2 A^2 R^2 Q + C^2 S^2 B^2 Q - B^2 S^2 A^2 R + B^2 SA^2 R^2$$

$$\overline{\Delta} = QS (Q - S) \rho.$$

*Então:*

a) *Se  $\rho > 0$  (Resp.  $\rho < 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\rho < 0$  (Resp.  $\rho > 0$ ), temos duas selas e um nó.*

**Proposição 4.3.3.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

i)  $Q < R < 0 < S$  (Resp.  $Q > R > 0 > S$ )

ii)  $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\psi = -Q(A^2RQ - A^2R^2 - B^2SQ + B^2S^2)R(-C^4Q^2 + C^4QR)$$

$$\sigma = A^2RQ - A^2R^2 - B^2SQ + B^2S^2$$

$$\rho = -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 - 2C^2B^2SQ^2 + 2C^2S^2B^2Q - B^2S^2A^2R + B^2SA^2R^2$$

$$\omega = C^2A^2RQ^2 - C^2B^2SQ^2 - C^2A^2R^2Q + C^2S^2B^2Q - B^2S^2A^2R + B^2SA^2R^2$$

$$\overline{\Delta} = QS(Q - S)\rho.$$

Então:

a) Se  $\rho < 0$  (Resp.  $\rho > 0$ ), temos uma única sela;

b) Se  $\rho > 0$  (Resp.  $\rho < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.3.4.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

i)  $Q < S < 0 < R$  (Resp.  $Q > S > 0 > R$ )

ii)  $(-B^2S^2 + B^2RS + Q^2C^2 - RC^2Q)S(-S + R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\psi = -Q(A^2RQ - A^2R^2 - B^2SQ + B^2S^2)R(-C^4Q^2 + C^4QR)$$

$$\sigma = A^2RQ - A^2R^2 - B^2SQ + B^2S^2$$

$$\rho = -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 - 2C^2B^2SQ^2 + 2C^2S^2B^2Q - B^2S^2A^2R + B^2SA^2R^2$$

$$\omega = C^2A^2RQ^2 - C^2B^2SQ^2 - C^2A^2R^2Q + C^2S^2B^2Q - B^2S^2A^2R + B^2SA^2R^2$$

$$\overline{\Delta} = QS(Q - S)\rho.$$

Então:

a) Se  $\rho > 0$  (Resp.  $\rho < 0$ ), temos uma única sela;

b) Se  $\rho < 0$  (Resp.  $\rho > 0$ ), temos duas selas e um nó.

### 4.3.2 Singularidades $r(u_3, \pm z_3)$

A fim de garantir que  $(\pm u_3, z_3)$  existem e estão no domínio das parametrizações consideradas, devemos ter:

- $(Q^2C^2 - C^2RQ - S^2B^2 + RB^2S)S(R - S) > 0$
- $(Q^2C^2 - C^2RQ - S^2B^2 + RB^2S)Q(Q - R) > 0$ .

Considerando que as condições acima devem sempre ser satisfeitas para que a nossa análise faça sentido, segue que só precisaremos analisar os seguintes casos:

- $S > R > Q > 0$
- $Q > R > S > 0$
- $S < R < Q < 0$
- $Q < R < S < 0$
- $R < S < 0 < Q$
- $R < Q < 0 < S$
- $R > S > 0 > Q$
- $R > Q > 0 > S$ .

Seguindo de maneira análoga ao feito na seção anterior, obtemos as seguintes proposições, cujas demonstrações serão omitidas por serem semelhantes ao já feito:

**Proposição 4.3.5.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

- i)  $S > R > Q > 0$  (Resp.  $S < R < Q < 0$ )*
- ii)  $(Q^2C^2 - C^2RQ - S^2B^2 + RB^2S)Q(Q - R) > 0$ .*

*Sejam ainda*

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= (Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S)Q(Q - R) \\ \bar{\sigma} &= Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S \\ \bar{\rho} &= -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + 2R^2A^2B^2S - 2RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q \\ \bar{\omega} &= -C^2A^2R^2Q + R^2A^2B^2S + C^2A^2RQ^2 - RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q \\ \bar{\Delta} &= RS(S - R)\bar{\rho}.\end{aligned}$$

*Então:*

- a) Se  $\bar{\rho} < 0$  (Resp.  $\bar{\rho} > 0$ ), temos uma única sela;  
 b) Se  $\bar{\rho} > 0$  (Resp.  $\bar{\rho} < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.3.6.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

- i)  $Q > R > S > 0$  (Resp.  $Q < R < S < 0$ )  
 ii)  $(Q^2C^2 - C^2RQ - S^2B^2 + RB^2S)Q(Q - R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= (Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S)Q(Q - R) \\ \bar{\sigma} &= Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S \\ \bar{\rho} &= -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + 2R^2A^2B^2S - 2RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q \\ \bar{\omega} &= -C^2A^2R^2Q + R^2A^2B^2S + C^2A^2RQ^2 - RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q \\ \bar{\Delta} &= RS(S - R)\bar{\rho}.\end{aligned}$$

Então:

- a) Se  $\bar{\rho} > 0$  (Resp.  $\bar{\rho} < 0$ ), temos uma única sela;  
 b) Se  $\bar{\rho} < 0$  (Resp.  $\bar{\rho} > 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.3.7.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

- i)  $R < S < 0 < Q$  (Resp.  $R > S > 0 > Q$ )  
 ii)  $(Q^2C^2 - C^2RQ - S^2B^2 + RB^2S)Q(Q - R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= (Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S)Q(Q - R) \\ \bar{\sigma} &= Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S \\ \bar{\rho} &= -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + 2R^2A^2B^2S - 2RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q \\ \bar{\omega} &= -C^2A^2R^2Q + R^2A^2B^2S + C^2A^2RQ^2 - RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q \\ \bar{\Delta} &= RS(S - R)\bar{\rho}.\end{aligned}$$

Então:

- a) Se  $\bar{\rho} < 0$  (Resp.  $\bar{\rho} > 0$ ), temos uma única sela;  
 b) Se  $\bar{\rho} > 0$  (Resp.  $\bar{\rho} < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.3.8.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

i)  $R < Q < 0 < S$  (Resp.  $R > Q > 0 > S$ )

ii)  $(Q^2C^2 - C^2RQ - S^2B^2 + RB^2S)Q(Q - R) > 0$ .

Sejam ainda

$$\bar{\psi} = (Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S)Q(Q - R)$$

$$\bar{\sigma} = Q^2C^2 - C^2RQ - B^2S^2 + RB^2S$$

$$\bar{\rho} = -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + 2R^2A^2B^2S - 2RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q$$

$$\bar{\omega} = -C^2A^2R^2Q + R^2A^2B^2S + C^2A^2RQ^2 - RA^2B^2S^2 - C^2B^2SQ^2 + C^2S^2B^2Q$$

$$\bar{\Delta} = RS(S - R)\bar{\rho}.$$

Então:

a) Se  $\bar{\rho} > 0$  (Resp.  $\bar{\rho} < 0$ ), temos uma única sela;

b) Se  $\bar{\rho} < 0$  (Resp.  $\bar{\rho} > 0$ ), temos duas selas e um nó.

## 4.4 Caso 3)

Consideremos o elipsoide  $\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ ,  $A, B, C > 0$  e a parametrização

$$r(v, z) = \left( \frac{\sqrt{-v^2C^2 - z^2B^2 + B^2C^2}A}{CB}, v, z \right).$$

Note que o campo de vetores restrito ao elipsoide é dado por

$$X(v, z) = \left( R \frac{\sqrt{-v^2C^2 - z^2B^2 + B^2C^2}A}{CB}, Sv, Qz \right),$$

assim, temos a congruência  $\{X(v, z), r(v, z)\}$ . As singularidades encontradas estão em:

$$\text{a) } (\pm v_4, z_4) = \left( \frac{\sqrt{-Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ)B^2}}{Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)C^2}, 0 \right)$$

$$\text{b) } (v_5, \pm z_5) = \left( 0, \frac{\sqrt{-(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(Q - S)C^2}}{C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2} \right).$$

#### 4.4.1 Singularidades $r(\pm v_4, z_4)$

A fim de garantir que  $(\pm v_4, z_4)$  existem e estão no domínio das parametrizações consideradas, devemos ter:

- $(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ) R(Q - R) > 0$
- $-Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ) S(C^4Q^2 - C^4SQ) > 0$ .

Considerando que as condições acima devem sempre ser satisfeitas para que a nossa análise faça sentido, segue que só precisaremos analisar os seguintes casos:

- $R > Q > S > 0$
- $S > Q > R > 0$
- $R < Q < S < 0$
- $S < Q < R < 0$
- $Q < R < 0 < S$
- $Q < S < 0 < R$
- $Q > R > 0 > S$
- $Q > S > 0 > R$ .

Seguindo de maneira análoga ao feito na seção anterior, obtemos as seguintes proposições, cujas demonstrações serão omitidas por serem semelhantes ao já feito:

**Proposição 4.4.1.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

*i)  $R > Q > S > 0$  (Resp.  $R < Q < S < 0$ )*

*ii)  $-Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ) S(C^4Q^2 - C^4SQ) > 0$ .*

*Sejam ainda*

$$\theta = -Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ) S(C^4Q^2 - C^4SQ)$$

$$\kappa = -B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ$$

$$\phi = -2C^2B^2SQ^2 + 2C^2B^2S^2Q - 2C^2R^2A^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + R^2A^2B^2S - RA^2B^2S^2$$

$$\eta = -C^2B^2SQ^2 + C^2A^2RQ^2 + C^2B^2S^2Q - C^2R^2A^2Q - RA^2B^2S^2 + R^2A^2B^2S.$$

$$\overline{\Delta} = QR(R - Q)\phi.$$

*Então:*

- a) Se  $\phi < 0$  (Resp.  $\phi > 0$ ), temos uma única sela;  
 b) Se  $\phi > 0$  (Resp.  $\phi < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.4.2.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

- i)  $S > Q > R > 0$  (Resp.  $S < Q < R < 0$ )  
 ii)  $-Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ) > 0$ .

Sejam ainda

$$\begin{aligned}\theta &= -Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ) \\ \kappa &= -B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ \\ \phi &= -2C^2B^2SQ^2 + 2C^2B^2S^2Q - 2C^2R^2A^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + R^2A^2B^2S - RA^2B^2S^2 \\ \eta &= -C^2B^2SQ^2 + C^2A^2RQ^2 + C^2B^2S^2Q - C^2R^2A^2Q - RA^2B^2S^2 + R^2A^2B^2S \\ \overline{\Delta} &= QR(R - Q)\phi.\end{aligned}$$

Então:

- a) Se  $\phi > 0$  (Resp.  $\phi < 0$ ), temos uma única sela;  
 b) Se  $\phi < 0$  (Resp.  $\phi > 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.4.3.** Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha

- i)  $Q < R < 0 < S$  (Resp.  $Q > R > 0 > S$ )  
 ii)  $-Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ) > 0$ .

Sejam ainda

$$\begin{aligned}\theta &= -Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ) \\ \kappa &= -B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ \\ \phi &= -2C^2B^2SQ^2 + 2C^2B^2S^2Q - 2C^2R^2A^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + R^2A^2B^2S - RA^2B^2S^2 \\ \eta &= -C^2B^2SQ^2 + C^2A^2RQ^2 + C^2B^2S^2Q - C^2R^2A^2Q - RA^2B^2S^2 + R^2A^2B^2S \\ \overline{\Delta} &= QR(R - Q)\phi.\end{aligned}$$

Então:

- a) Se  $\phi < 0$  (Resp.  $\phi > 0$ ), temos uma única sela;  
 b) Se  $\phi > 0$  (Resp.  $\phi < 0$ ), temos duas selas e um nó.

**Proposição 4.4.4.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) \quad Q < S < 0 < R \text{ (Resp. } Q > S > 0 > R)$$

$$ii) \quad -Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ) > 0.$$

*Sejam ainda*

$$\theta = -Q(-B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ)S(C^4Q^2 - C^4SQ)$$

$$\kappa = -B^2SQ + B^2S^2 - R^2A^2 + A^2RQ$$

$$\phi = -2C^2B^2SQ^2 + 2C^2B^2S^2Q - 2C^2R^2A^2Q + 2C^2A^2RQ^2 + R^2A^2B^2S - RA^2B^2S^2$$

$$\eta = -C^2B^2SQ^2 + C^2A^2RQ^2 + C^2B^2S^2Q - C^2R^2A^2Q - RA^2B^2S^2 + R^2A^2B^2S$$

$$\bar{\Delta} = QR(R - Q)\phi.$$

*Então:*

a) *Se  $\phi > 0$  (Resp.  $\phi < 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\phi < 0$  (Resp.  $\phi > 0$ ), temos duas selas e um nó.*

#### 4.4.2 Singularidades $r(u_5, \pm z_5)$

A fim de garantir que  $(\pm v_4, z_4)$  existem e estão no domínio das parametrizações consideradas, devemos ter:

- $(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)R(R - S) > 0$
- $-(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(Q - S).$

Considerando que as condições acima devem sempre ser satisfeitas para que a nossa análise faça sentido, segue que só precisaremos analisar os seguintes casos:

- $R > S > Q > 0$
- $Q > S > R > 0$
- $R < S < Q < 0$
- $Q < S < R < 0$
- $S < R < 0 < Q$
- $S < Q < 0 < R$
- $S > R > 0 > Q$
- $S > Q > 0 > R.$

Seguindo de maneira análoga ao feito na seção anterior, obtemos as seguintes proposições, cujas demonstrações serão omitidas por serem semelhantes ao já feito:



**Proposição 4.4.5.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) \ R > S > Q > 0 \text{ (Resp. } R < S < Q < 0)$$

$$ii) \ -(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(Q - S).$$

*Sejam ainda*

$$\bar{\theta} = -(C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(-S + Q)$$

$$\bar{\kappa} = C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2$$

$$\bar{\phi} = 2C^2B^2S^2Q - 2C^2B^2SQ^2 - 2S^2B^2A^2R + 2SB^2R^2A^2 + C^2A^2RQ^2 - C^2R^2A^2Q$$

$$\bar{\eta} = SB^2R^2A^2 - C^2R^2A^2Q + C^2A^2RQ^2 - S^2B^2A^2R + C^2B^2S^2Q - C^2B^2SQ^2$$

$$\bar{\Delta} = RS(R - S)\bar{\phi}.$$

*Então:*

a) *Se  $\bar{\phi} > 0$  (Resp.  $\bar{\phi} < 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\bar{\phi} < 0$  (Resp.  $\bar{\phi} > 0$ ), temos duas selas e um nó.*

**Proposição 4.4.6.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) \ Q > S > R > 0 \text{ (Resp. } Q < S < R < 0)$$

$$ii) \ -(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(Q - S).$$

*Sejam ainda*

$$\bar{\theta} = -(C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(-S + Q)$$

$$\bar{\kappa} = C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2$$

$$\bar{\phi} = 2C^2B^2S^2Q - 2C^2B^2SQ^2 - 2S^2B^2A^2R + 2SB^2R^2A^2 + C^2A^2RQ^2 - C^2R^2A^2Q$$

$$\bar{\eta} = SB^2R^2A^2 - C^2R^2A^2Q + C^2A^2RQ^2 - S^2B^2A^2R + C^2B^2S^2Q - C^2B^2SQ^2$$

$$\bar{\Delta} = RS(R - S)\bar{\phi}.$$

*Então:*

a) *Se  $\bar{\phi} < 0$  (Resp.  $\bar{\phi} > 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\bar{\phi} > 0$  (Resp.  $\bar{\phi} < 0$ ), temos duas selas e um nó.*

**Proposição 4.4.7.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) \ S > R > 0 > Q \text{ (Resp. } S < R < 0 < Q)$$

$$ii) \ -(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(Q - S).$$

*Sejam ainda*

$$\bar{\theta} = -(C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(-S + Q)$$

$$\bar{\kappa} = C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2$$

$$\bar{\phi} = 2C^2B^2S^2Q - 2C^2B^2SQ^2 - 2S^2B^2A^2R + 2SB^2R^2A^2 + C^2A^2RQ^2 - C^2R^2A^2Q$$

$$\bar{\eta} = SB^2R^2A^2 - C^2R^2A^2Q + C^2A^2RQ^2 - S^2B^2A^2R + C^2B^2S^2Q - C^2B^2SQ^2$$

$$\bar{\Delta} = RS(R - S)\bar{\phi}.$$

*Então:*

a) *Se  $\bar{\phi} < 0$  (Resp.  $\bar{\phi} > 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\bar{\phi} > 0$  (Resp.  $\bar{\phi} < 0$ ), temos duas selas e um nó.*

**Proposição 4.4.8.** *Considere a congruência  $\mathcal{C}$ , dada na proposição (4.1.1), e suponha*

$$i) \ S > Q > 0 > R \text{ (Resp. } S < Q < 0 < R)$$

$$ii) \ -(C^2SQ - Q^2C^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(Q - S).$$

*Sejam ainda*

$$\bar{\theta} = -(C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2)Q(-S + Q)$$

$$\bar{\kappa} = C^2SQ - C^2Q^2 - SA^2R + R^2A^2$$

$$\bar{\phi} = 2C^2B^2S^2Q - 2C^2B^2SQ^2 - 2S^2B^2A^2R + 2SB^2R^2A^2 + C^2A^2RQ^2 - C^2R^2A^2Q$$

$$\bar{\eta} = SB^2R^2A^2 - C^2R^2A^2Q + C^2A^2RQ^2 - S^2B^2A^2R + C^2B^2S^2Q - C^2B^2SQ^2$$

$$\bar{\Delta} = RS(R - S)\bar{\phi}.$$

*Então:*

a) *Se  $\bar{\phi} > 0$  (Resp.  $\bar{\phi} < 0$ ), temos uma única sela;*

b) *Se  $\bar{\phi} < 0$  (Resp.  $\bar{\phi} > 0$ ), temos duas selas e um nó.*

Considerando as seguintes parametrizações:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } r_1(u, v) &= \left( u, v, \frac{\sqrt{A^2 B^2 - A^2 v^2 - B^2 u^2} C}{BA} \right) \\
 \text{b) } r_2(u, v) &= \left( u, v, -\frac{\sqrt{A^2 B^2 - A^2 v^2 - B^2 u^2} C}{BA} \right) \\
 \text{c) } r_3(u, z) &= \left( u, \frac{\sqrt{-u^2 C^2 - z^2 A^2 + A^2 C^2 B}}{CA}, z \right) \\
 \text{d) } r_4(u, z) &= \left( u, -\frac{\sqrt{-u^2 C^2 - z^2 A^2 + A^2 C^2 B}}{CA}, z \right) \\
 \text{e) } r_5(v, z) &= \left( \frac{\sqrt{-v^2 C^2 - z^2 B^2 + B^2 C^2 A}}{CB}, v, z \right) \\
 \text{f) } r_6(v, z) &= \left( -\frac{\sqrt{-v^2 C^2 - z^2 B^2 + B^2 C^2 A}}{CB}, v, z \right),
 \end{aligned}$$

verificamos, com a ajuda do software Maple, a igualdade dos seguintes conjuntos de pontos:

- $\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\} = \{r_5(v_5, \pm z_5), r_6(v_5, \pm z_5)\}$
- $\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\} = \{r_3(u_3, \pm z_3), r_4(u_3, \pm z_3)\}$
- $\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\} = \{r_5(\pm v_4, z_4), r_6(\pm v_4, z_4)\}.$

Utilizando as proposições apresentadas neste capítulo e as igualdades verificadas acima, apresentamos um quadro resumo no qual indicamos o campo e as singularidades correspondentes:

Tabela 4.1: Quadro das Singularidades

Campo	Singularidades	$D_1$	$D_2$
$R > S > Q > 0$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta > 0$	Se $\beta < 0$
$R > Q > S > 0$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho < 0$	Se $\rho > 0$
$S > R > Q > 0$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} < 0$	Se $\bar{\beta} > 0$
$S > Q > R > 0$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho > 0$	Se $\rho < 0$
$Q > R > S > 0$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} > 0$	Se $\bar{\beta} < 0$
$Q > S > R > 0$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta < 0$	Se $\beta > 0$
$R < S < Q < 0$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta < 0$	Se $\beta > 0$
$S < R < Q < 0$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} > 0$	Se $\bar{\beta} < 0$
$S < Q < R < 0$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho < 0$	Se $\rho > 0$
$Q < S < R < 0$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta > 0$	Se $\beta < 0$
$Q < R < S < 0$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} < 0$	Se $\bar{\beta} > 0$
$R < Q < S < 0$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho > 0$	Se $\rho < 0$
$Q > 0 > R > S$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta > 0$	Se $\beta < 0$
$Q > 0 > S > R$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} < 0$	Se $\bar{\beta} > 0$
$S > 0 > R > Q$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho < 0$	Se $\rho > 0$
$S > 0 > Q > R$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} > 0$	Se $\bar{\beta} < 0$
$R > 0 > Q > S$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta < 0$	Se $\beta > 0$
$R > 0 > S > Q$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho > 0$	Se $\rho < 0$
$R > S > 0 > Q$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} > 0$	Se $\bar{\beta} < 0$
$S > R > 0 > Q$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta < 0$	Se $\beta > 0$
$R > Q > 0 > S$	$\{r_1(u_1, \pm v_1), r_2(u_1, \pm v_1)\}$	Se $\bar{\beta} < 0$	Se $\bar{\beta} > 0$
$Q > R > 0 > S$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho > 0$	Se $\rho < 0$
$S > Q > 0 > R$	$\{r_1(\pm u_0, v_0), r_2(\pm u_0, v_0)\}$	Se $\beta > 0$	Se $\beta < 0$
$Q > S > 0 > R$	$\{r_3(\pm u_2, z_2), r_4(\pm u_2, z_2)\}$	Se $\rho < 0$	Se $\rho > 0$

Onde:

$$\begin{aligned}
\beta &= -2B^2A^2RS^2 + 2B^2A^2R^2S - 2B^2Q^2C^2S + 2B^2C^2QS^2 + C^2Q^2A^2R - C^2QA^2R^2 \\
\bar{\beta} &= 2Q^2RA^2C^2 - Q^2C^2B^2S - 2QR^2A^2C^2 + QC^2B^2S^2 - 2A^2B^2RS^2 + 2A^2B^2R^2S \\
\rho &= -2C^2A^2R^2Q + 2C^2A^2RQ^2 - 2C^2B^2SQ^2 + 2C^2S^2B^2Q - B^2S^2A^2R + B^2SA^2R^2.
\end{aligned}$$

Assim, quando utilizamos a tabela (4.1), verificamos que, fixado um campo, o elipsoide tem quatro singularidades, que serão todas do mesmo tipo ( $D_1$  ou  $D_2$ ). As duas Figuras a seguir sintetizam os possíveis comportamentos das curvas principais sobre o Elipsoide:

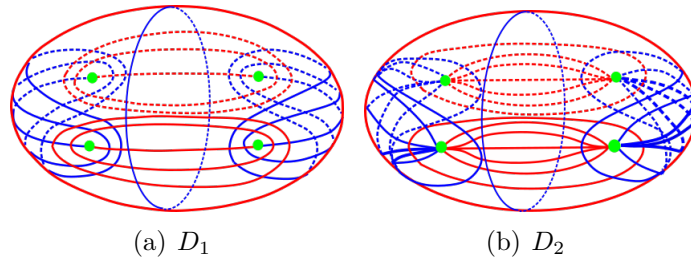


Figura 4.1: Curvas Principais no Elipsoide

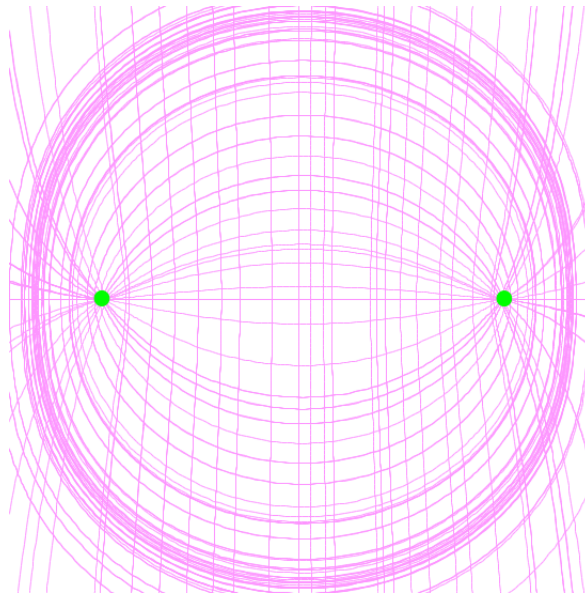
**Exemplo 4.4.1.** Se considerarmos o campo de vetores  $\bar{X}(x, y, z) = (4x, 2y, z)$  e o elipsoide  $\frac{u^2}{9} + \frac{v}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ , obtemos as seguintes singularidades:

- $(\pm \frac{9}{11} \sqrt{11}, 0)$ ,

que correspondem aos seguintes pontos no elipsoide

- $(\frac{9}{11} \sqrt{11}, 0, 4/11 \sqrt{22})$
- $(-\frac{9}{11} \sqrt{11}, 0, 4/11 \sqrt{22})$
- $(\frac{9}{11} \sqrt{11}, 0, -4/11 \sqrt{22})$
- $(-\frac{9}{11} \sqrt{11}, 0, -4/11 \sqrt{22})$ .

Graficamente, temos o seguinte comportamento para os dois pontos com coordenada  $z$  positiva:

Figura 4.2: Singularidade do tipo  $D_2$ 

O comportamento das curvas principais próximas das duas singularidades com coordenada  $z$  negativa é o mesmo.

**Exemplo 4.4.2.** Se considerarmos o campo de vetores  $\bar{X}(x, y, z) = (4x, 2y, z)$  e o elipsoide  $\frac{u^2}{9} + \frac{v}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$ , obtemos as seguintes singularidades:

- $(\pm \frac{18}{97} \sqrt{194}, 0)$ ,

que correspondem aos seguintes pontos no elipsoide

- $(\frac{18}{97} \sqrt{194}, 0, \frac{25}{97} \sqrt{97})$
- $(-\frac{18}{97} \sqrt{194}, 0, \frac{25}{97} \sqrt{97})$
- $(\frac{18}{97} \sqrt{194}, 0, -\frac{25}{97} \sqrt{97})$
- $(-\frac{18}{97} \sqrt{194}, 0, -\frac{25}{97} \sqrt{97})$ .

Graficamente, temos o seguinte comportamento para os dois pontos com coordenada  $z$  positiva:

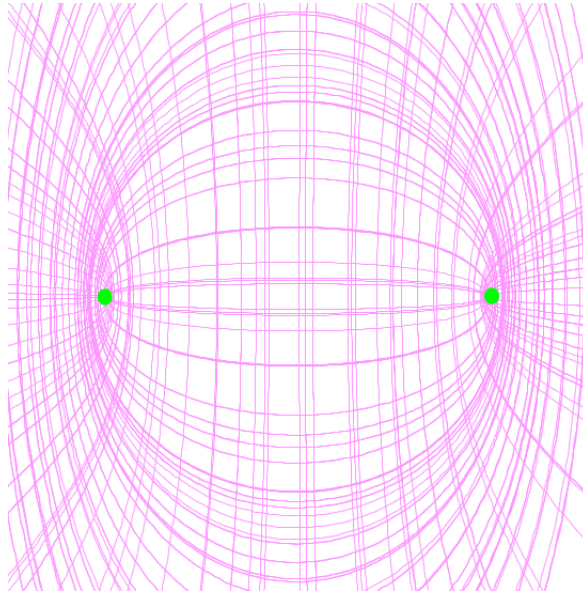


Figura 4.3: Singularidade do tipo  $D_1$

O comportamento das curvas principais próximas das duas singularidades com coordenada  $z$  negativa é o mesmo.

## 4.5 O campo com dois autovalores complexos conjugados

Consideremos o campo de vetores com dois autovalores complexos conjugados e um autovalor real não-nulo, dado por  $\bar{X}(x, y, z) = (\alpha x + \beta y, \alpha y - \beta x, \lambda z)$ , onde  $\lambda$  é o autovalor real e  $\alpha \pm i\beta$  os autovalores complexos. Consideremos ainda o Elipsoide de

três eixos distintos  $\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ , onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são reais e não nulos. Seja  $\mathcal{C}$  a congruência  $\{r_1(u, v), X(u, v)\}$ , onde

- $r_1(u, v) = \left( u, v, \frac{\sqrt{A^2 B^2 - A^2 v^2 - B^2 u^2} C}{BA} \right);$
- $X(u, v) = \overline{X} \circ r_1(u, v).$

Seguindo de maneira análoga ao feito no decorrer deste capítulo, calculamos os coeficientes das formas de Kummer e em seguida, obtemos

- $L = 2fa - e(b + b') = -2 \frac{(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) C^2 vu}{-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2}$
- $M = ag - ec = - \frac{(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) (A^2 v - B^2 u) (A^2 v + B^2 u) C^2}{B^2 A^2 (-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2)}$
- $N = g(b + b') - 2fc = 2 \frac{(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) C^2 vu}{-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2}.$

Note nas expressões acima, que se ocorre  $(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) = 0$ , temos uma congruência isotrópica, pois  $L(u, v) = M(u, v) = N(u, v) = 0$ . Consideremos que  $(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) \neq 0$ .

Ao resolvermos  $L(u, v) = M(u, v) = 0$ , obtemos  $(0, 0)$  como única solução. É válido mencionar que se considerarmos as demais parametrizações listadas no início da seção (4.1) não encontraremos outra solução real para  $L(u, v) = M(u, v) = 0$ , portanto, considerando apenas a parametrização  $r_1(u, v)$ , iremos estudar o comportamento global das curvas principais para a congruência gerada pela restrição do campo  $\overline{X}(x, y, z)$  ao Elipsoide. Note que  $r_1$  parametriza apenas a região onde  $z > 0$ , no entanto, por simetria, obtemos os mesmos resultados para a região do Elipsoide onde  $z < 0$ .

Utilizando o Software Maple, verificamos que a Equação das Superfícies Principais se reduz a

$$-2C^2 (\alpha^2 - \alpha + \beta^2) (-B^2 uv' + u'vA^2) (vv'A^2 + B^2 u'u) = 0, \quad (4.23)$$

donde obtemos

- $\frac{v'}{u'} = \frac{A^2 v}{B^2 u}$  ou
- $\frac{v'}{u'} = -\frac{B^2 u}{A^2 v}.$

Logo, para estudar as curvas integrais de (4.23), basta que estudemos os dois sistemas

bidimensionais lineares dados abaixo

$$\begin{cases} v' = A^2 v \\ u' = B^2 u \end{cases} \quad \begin{cases} v' = -B^2 u \\ u' = A^2 v \end{cases},$$

nos quais  $(0, 0)$  é, respectivamente, um ponto singular do tipo nó e um ponto singular do tipo centro. Sendo assim, concluímos que o comportamento das curvas principais sobre o Elipsoide pode ser descrito pela Figura abaixo

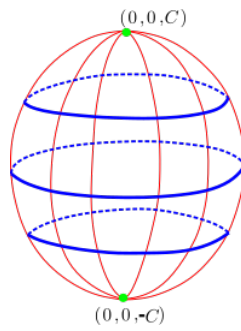


Figura 4.4: Curvas Principais Sobre o Elipsoide.



## 4.6 Conclusões

A partir do visto neste capítulo, concluímos que ao considerarmos a congruência  $\{X(u, v), r(u, v)\}$ , onde  $r(u, v)$  é uma parametrização do elipsoide como gráfico e  $X(u, v) = \bar{X} \circ r(u, v)$ , para  $\bar{X}(x, y, z) = (Rx, Sy, Qz)$ , com  $R, S$  e  $Q$  reais, não nulos e distintos, obtemos sempre quatro singularidades umbílicas sobre o elipsoide, de maneira que essas singularidades serão todas do tipo  $D_1$ , se o campo de Lie-Cartan associado possuir apenas uma singularidade, ou todas do tipo  $D_2$ , se o campo de Lie-Cartan associado possuir três singularidades. Dessa forma, as possíveis configurações das curvas principais (curvas integrais da Equação das Superfícies Principais) dessa congruência sobre o Elipsoide de três eixos distintos estão descritas nas duas Figuras abaixo.

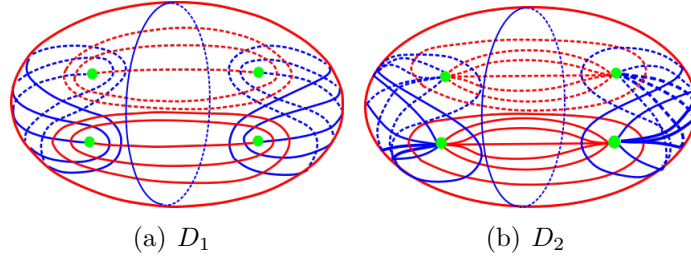


Figura 4.5: Curvas Principais no Elipsoide

A Figura (4.5(a)) corresponde ao Elipsoide de Monge que foi, segundo Sotomayor [21] o primeiro exemplo não trivial de configuração principal (linhas de curvatura sobre o Elipsoide), no qual as quatro singularidades são do tipo  $D_1$ . Já a Figura (4.5(b)) ilustra a configuração das curvas principais quando temos as quatro singularidades sendo do tipo  $D_2$ . Além do já citado, considerando a parametrização  $r_1$  (obtemos a mesma conclusão para as demais parametrizações), podemos observar que os coeficientes  $b$  e  $b'$  da congruência dada satisfazem:

$$b = b' = \frac{C^2 v Q u}{-u^2 B^2 - v^2 A^2 + A^2 B^2},$$

portanto, segundo o que consta na Proposição (2.1.10), a congruência é normal. Note que sendo  $\bar{X}(x, y, z) = (Rx, Sy, Qz)$ , temos  $\bar{X}$  perpendicular à superfície

$$R \frac{x^2}{2} + S \frac{y^2}{2} + Q \frac{z^2}{2} = a,$$

que a depender dos sinais de  $R, S$  e  $Q$  poderá ser, por exemplo, um Elipsoide ou um Hiperboloide. É válido ressaltar ainda que, considerando que as aplicações  $R_x(x, y, z) = (-x, y, z)$ ,  $R_y(x, y, z) = (x, -y, z)$  e  $R_z(x, y, z) = (x, y, -z)$  preservam a configuração das curvas principais, poderíamos reduzir nosso estudo ao caso 1).

Por fim, quando consideramos a congruência gerada pela restrição ao Elipsoide

do campo  $\overline{X}(x, y, z) = (\alpha x + \beta y, \alpha y - \beta x, \lambda z)$ , com dois autovalores complexos conjugados, feito na seção (4.5), a análise se torna mais simplificada, pois temos apenas dois pontos singulares e o comportamento das curvas principais independe do campo, desde que não estejamos no caso isotrópico, que ocorre quando  $(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) = 0$ . Sendo  $(\alpha^2 - \alpha + \beta^2) \neq 0$ , o que verificamos é que a configuração das curvas principais dessa congruência sobre o Elipsoide é a apresentada na Figura abaixo

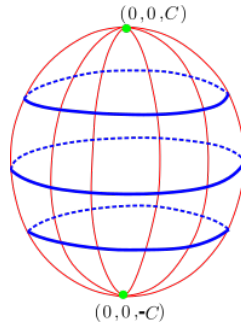


Figura 4.6: Curvas Principais Sobre o Elipsoide.

Vale ressaltar que o comportamento descrito na Figura acima é o mesmo apresentado pelas linhas de curvatura de um Elipsoide de Revolução, conforme cita Sotomayor em [21].

# Referências Bibliográficas

- [1] BIANCHI, L., **Lezioni di Geometria Differenziale**. E. Spoerri, Pisa, 1902.
- [2] BRUCE, J. W., FIDAL, D. **On binary differential equations and umbilics**, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 111A (1989), 147–168.
- [3] BRUCE, J. W., TARI, F., **On binary differential equations**, Nonlinearity, 8 (1995), 255–271.
- [4] DA CRUZ, D. H. **Geometria extrínseca de superfícies singulares de  $\mathbb{R}^3$** . UFG, 2013. 112 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.
- [5] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] EISENHART, L. P., **A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Ginn and Company, Boston, 1909.
- [7] FERNANDES, M. A. C. **Conjectura de Carathéodory para Superfícies em 3-espaço Minkowski**. UNIFEI, 2017. 99 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2017.
- [8] FORSYTH, A. **Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Cambridge, University Press, 1912.
- [9] GARCIA, R. SOTOMAYOR J. **Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory**. 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, 2009.
- [10] MONGE, G., **Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide**, Journ. de l'Ecole Polytechnique, 1le cah., 1796.
- [11] GHYS, E. **Gaspar Monge - le mémoire sur les déblais et les remblais**. Images des Mathématiques ([www.images.math.cnrs.fr](http://www.images.math.cnrs.fr)), 2012

- [12] GUTIERREZ, C., SOTOMAYOR, J. **Structurally stable configurations of lines of principal curvature**, *Asterisque*, 98-99 (1982), 195-215.
- [13] HUBBARD, J. H. WEST, B. H., **Differential Equations: A Dynamical Systems Approach**. Springer Verlag, New York, 1995.
- [14] LIMA, E. **Curso de análise, vol. 2**. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2010.
- [15] MARTIN, P. A., **Grupos, Corpos e Teoria de Galois, Volume 2** - Textos Universitários do IME - USP. Livraria da Física, São Paulo, 2010.
- [16] MONTESINOS, A. Softwares livres de Àngel Montesinos. [www.uv.es/montesin](http://www.uv.es/montesin), 2009.
- [17] POTTMANN, H. WALLNER, J., **Computational Line Geometry**. Springer Verlag, Berlim, 2010.
- [18] PRADO, R. F. **Congruências de retas e superfícies mínimas de Laguerre**. UNB, 2011. 45 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade de Brasília, Brasília, 2011
- [19] SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Textos Universitários do IME-USP. Livraria da Física, São Paulo, 2011.
- [20] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides. IMPA - CNPq, Rio de Janeiro, 1979.
- [21] SOTOMAYOR, J. **O Elipsoide de Monge**. *Matemática Universitária* - Número 15, 1993, 33-47.
- [22] WEATHERBURN, C.E. **Differential Geometry of Three Dimensions - Volume I**. Cambridge University Press, Londres, 1955.